ET BIDRAG

TIL DEN

GEOMETRISKE EVOLUTIONS THEORIE.

Af

C. F. DEGEN,
Dr. Philos.

Forerindring.

Nærværende liden Afhandling, hvortil jeg fik Anledning ved et af den berömte Mathematiker *Jakob Bernoulli*, i Act. Erud. Lips. Anno 1692. Jun. pag. 291, fremsat Theorem, er en Virkning af den Tilböjelighed Forf. stedse har havt til at generalisere alle ham forekommende Sætninger. Kan denne Tilböjelighed nogensinde stifte Skade? Jeg maa besvare dette Spörgsmaal med et *Nej*, naar derved især haves Hensyn til Mathematiken. I andre Henseender, med et: Non liquet. Iblandt de mange unyttige Distinctioner, som speculative Hoveder til alle Tider, *fra Aristoteles indtil Kant*, have frembragt, bör vel neppe den henföres, der adskiller de mathematiske Sætningers Universalitet fra de philosophiske og andre scientifiske Sætningers Universalitet. De förste stige i Brugbarhed, jo almindeligere de blive, da derimod de sidste blive mindre og mindre brugbare fordi de blive mindre og mindre bestemte. Naar a, b, h forestille en Trekants tre Sider, og ϕ en lige over for h liggende Vinkel i samme Trekant, saa veed jeg af Trigonometrien at

$$A)\ h^2 = a^2 \pm 2ab.\cos.\phi + b^2.$$

Ligeledes lærer Geometrien mig at B) $h^2 = a^2 + b^2$, naar Trianglet er retvinklet. Men, hvilken Forskjel imellem begge Sætningers Brugbarhed! B er underordnet A, er kun en meget speciel Fölge af de utallige mange, som kunne udledes af A, strækker sig allene til det retvinklede Triangels Beregning, da A derimod uindskrænket kan anvendes paa ethvert Triangel, naar der spörges om, af tvende Sider og den mellemliggende Vinkel at bestemme den 3die Side. Og dog er A, skjöndt ubestemt i Henseende til sin Gjenstand, ikke mindre bestemt end B i Henseende til Rigtigheden af de Resultater, der skulle drages ud af samme. Her er intet usikkert, intet vaklende, intet tvetydigt. Man betragte derimod en metaphysisk Sætning: man höre af en eller anden Philosoph, *at Naturen i alle sine Virkninger iagttager Sparsomheds Lov, og stedse frembringer et Minimum*; saa blive her, Sætningens almeengyldige Rigtighed uanfægtet, endnu mange Spörgsmaal tilovers, angaaende dette Minimi rigtige Bestemmelse i enkelte Tilfælde; og hvor afvigende er ikke denne! Ved *Kjædeliniernes* og andre dermed beslægtede Figurers Bestemmelse er Tyngdepunktets Afstand fra Horizonten et Minimum; i den krumme Linie, som Lysstraalen beskriver igjennem en Atmosphære, som Jordens, er Tiden dette Mindste; ved de Baner, som udkastede Legemer beskrive i lufttomme Rum, er Summen af de levende Kræfters Producter med Tids-Elementerne, og ved de elastiske krumme Linier Integral-Formelen $\int\frac{ds}{RR}$ (hvor ds betyder et Element af den krumme Linie og R Röre-Cirkelens Radius) dette Minimum. Hvori ligne nu alle disse Vurderinger hinanden? Hvor er det *vejledende Princip*, som förer sikkert gjennem dette Mörke? Saa passende og overtydende end dette Exempel kunde synes at være, saa give dog de theoretiske Pædagogers Forskrifter endnu langt fyndigere Beviis for denne Distinctions Rigtighed. Men, her er ikke Stædet at bevise dette udförligere.

En Bebrejdelse, som man ikke uden Grund kan gjöre mange af de berömte Mathematiker, som blomstrede ved Slutningen af forrige og i Begyndelsen af nærværende Aarhundrede, er den, at de med Flid skjulte Methoder, ved hvis Hjelp de havde opfundet nye og mærkværdige Sætninger. Vel nægter jeg ikke, at Epictets: Παν πραγμα δυο ἐχει λαβας, jo ogsaa kan anvendes her, og at man kunde indvende, at selv denne Hemmeligholdelse kunde forögeOpfindelsernes Antal, ved den Drift den maatte fremvirke hos andre skarpsindige Sandhedsforskere til at komme efter Grunden til en bekjendtgjort men ikke fuldstændig udviklet Opdagelse. Men, alting vel vejet, troer jeg man vil frafalde denne Apologie, naar man betænker

1) *At det Heele slet intet vinder ved at blive bekjendt med Sætninger, hvortil det ikke kan finde Grunden, det er, hvis Rigtighed det ikke kan indsee.* Man see f. Ex. det af Joh. Bernoulli i Act. Erud. Lips. 1698 Octob. p. 462, fremsatte Theorem, for Rectificationen af tvende forskjellige krumlinede Buers Summe eller Differentz. Non opus est, tilföjer *B.* (hvorfor ikke?) indicare qua via, quave

analysi huc pervenerim; calculus foret nimiæ prolixitatis. Desmere, mener jeg, var Meddelelsen nyttig og nödvendig, fordi en vidtlöftig og forviklet Calcul, efter Hr. Prof. *Pfaff's* Udtryk, er et Medium resistens, igjennem hvilket ikke enhver trænger sig lige let.

2) *At den Tid, som gode Hoveder anvende paa at söge allerede fundne Ting, langt bedre kunde anvendes paa anere Æmner, som nu maaskee undersöges med mindre Held af en ved forgjæves Arbejde trættet, og adspredt Aand.* Ars longa, vita brevis.

3) *At man ved at skjule sine Methoder, derved beröver sine Medbrödre des fortræffeligere og virksommere Hjelpemidler, jo ypperligere disse Methoder ere.*

4) *At Grunden til denne Hemmeligholdelse neppe er roesværdig, men bestaaer i en uregleret Higen efter kortvarende Beundring, som dog aldrig kan komme i Sammenligning med den Haeder, at være sit Kjöns Velgjörer.*

5) Endelig veed enhver, som ikke behandler sin Videnskab ganske machinmæssig, at *mange vigtige Sætninger opdages ligesom i Forbigaaende.* Saaledes er Forf., i det han sögte noget ganske andet, kommen til et ganske nyt Beviis for den af *Lambert* (Zusätze zu den log. und trig. Tabellen, Einl. pag. 43. §. 51.) anförte Fermatske Sætning, og paa en lignende Vej, hvor heterogene end Resultaterne ere, til Integralet:

$$\int \frac{dx}{m+x\,\mathfrak{M}} = {}^{m}\mathfrak{A} \, . \log . \text{nat} . (1+x) - 2 \, . {}^{m}\mathfrak{B} \, . \log . (2+x) + 3 \, . {}^{m}\mathfrak{C} \, . \log . (3+x) - \ldots \pm m \log . (m+x).$$

hvor Unzial-Bogstaverne med de til venstre Side skrevne Exponenter betyde Binomial-Coëfficienterne, betegnede efter den *Hindenburgske* Methode. Æren af at finde saadanne Resultater er altsaa langt fra ikke saa stor som Glæden, de foraarsage Videnskabens Elsker.

Til Videnskabernes sande Tarv er det derfor ikke engang tilstrækkeligt, at man beviser de nye opfundne Sætningers *Rigtighed*; man bör og angive, *hvorledes* man har fundet Vejen dertil. Hermann og Newton vare Opfindere i Mechaniken, men de skjulte bag synthetiske Beviser den Analyse, som havde vejledet dem dertil, og Læseren er, efter den store Eulers Dom, endnu meget forlegen, naar han, efter at have arbejdet sig igjennem de besværlige Beviser efter de Gamles Maade, seer at han, med al erhvervet historisk-philosophisk Kundskab dog ikke er istand til at oplöse et Problem, naar det fremsættes i en noget forandret Skikkelse. Saaledes gik det Euler selv. Sed qvod omnibus scriptis, quæ sine Analysi sunt composita, id potissimum Mechanicis obtingit, ut Lector, etiamsi de veritate eorum, quæ proferuntur, convincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum cognitionem assequatur, ita ut easdem quæstiones, si tantillum immutentur, proprio Marte vix resolvere valeat, nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo evolvat. Idem omnino mihi, cum *Newtoni* Principia et *Hermanni* Phoronomiam perlustrare coepissem, usu venit, ut quamvis plurium problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum discrepantia problemata resolvere non potuerim. Dette er denne udödelige Mands Bekjendelse i Fortalen til hans *Mechanica, sive motus Scientiæ analytice exposita.*

Exempler paa den her paaankede Fejl i nyere mathematiske Skrifter torde det heller ikke blive vanskeligt at fremvise, naar det ikke förte for langt fra Hovedsagen. Jeg slutter desaarsag disse forelöbende Betragtninger med det Önske, at man, især ved vanskeligere og mindre almindelig bekjendte Sætninger vilde fölge den priselige af Wolf, i hans Elementis saa omhyggelig iagttagne, Skik at vise tilbage til de Steder, enten i Forfatterens egne eller i andres Skrifter, hvor saadanne Læsere, som det er om at gjöre, at have sammenhængende Ideer, kunde finde Beviserne for de Sætninger, og Grundene til de Methoder, af hvilke man da betjener sig.

§. 1.

Iblandt de trende af Huygens, Leibnitz og Joh. Bernoulli i den höjere Geometrie indförte Maader at betragte krumme Linier paa, som disse store Mænd udledede af forskjellige Arter af Bevægelse, Motus Evolutionis, Tractionis et Reptionis, synes den förste meest, den anden mindst at være *reen-geometrisk*; den sidste derimod at holde en Middelvej imellem de tvende andre. Ikke mindre fortrinlig end frugtbar paa ligesaa vigtige som skjönne Fölger synes den Huygenske Evolution at være for Grandskeren. Hvor vigtige Ruller Cycloïderne og de logarithmiske Spiraler spille i denne Deel af den höjere Mathematik, er noksom bekjendt.

§. 2.

Imidlertid er denne Materie, saavelsom enhver anden, uagtet de berömte Mænds Bestræbelser, der have arbejdet i samme, dog upaatvivlelig i Stand til at modtage om ikke store Udvidelser, dog en eller anden liden Tilsætning, hvorved ikke allene denne Theorie, men den hele Videnskab, maa vinde.

Saaledes er Radius Osculi, som i Begyndelsen kunde blot synes et Product af nysgjerrig Speculation, bleven vigtig i Bevægelses-Læren. Det forekommer mig derfor ligesaa illiberalt som upolitisk, naar man forkaster en speculativ Idee, fordi den ikke lover hastige Renter. *Det kongelige Videnskabers Selskab*, hvis Omhu ligesaavel omfatter Theoriens Forfremmelse, som dens nyttige Anvendelse, tillade mig derfor at fremföre dette lidet Product paa den store litteraire Skueplads, ifald det finder samme værdigt til en Plads imellem dets större og vigtigere Afhandlinger. Det tilhörer *Jac. Bernoulli*, i Henseende til *Materien*, men Forf. i Henseende til den almindeligere *Form* hvori det her fremsættes, og adskillige deraf uddragne Resultater.

§. 3.

De tvende almindeligste Methoder, hvoraf man i den höjere Geometrie betjener sig til at udtrykke krumme Liniers Natur, bestaae, som bekjendt deri, at man enten efter Behag antager en ret Linie, *Axen*, og derpaa fra et vist ligeledes efter Behag antaget Punkt afskjærer större eller mindre Stykker, *Abscisser*, og nu bestemmer, hvor store de rette Linier blive, som drages til den krumme Linie fra Abscissernes ubestemte Endepuncter og indslutte en vis given, ret eller skjæv, Vinkel med samme Abscisser; disse Linier kalder man, som bekjendt, *Ordinater*. Begge, Abscisser og Ordinater, faae det fælles Navn af *Coordinater*, som igjen, efter den indsluttede Vinkels Beskaffenhed, deles i *retvinklede* og *skjævvinklede*. Det er og bekjendt, at man for en anden Axe, et andet Abscissernes Begyndelses-Punkt og en anden Coordinations-Vinkel faaer en anden Ligning for samme krumme Linie, endskjönt af samme Grad, som den Ligning af hvilken den udledes, naar denne er algebraïsk; og dette er et stort Fortrin ved denne förste Methode. Eller og, (deri bestaaer den anden almindelige Methode) man bestemmer af den krumme Linies Natur, hvor store de af et fælles Punkt, *Polen*, dragne Ordinater blive, og tager istædet for retlinede Abscisser, de Cirkelbuer, som ligge imellem et i en given Cirkel-Peripherie antaget fast Punkt og det Punkt, hvor *Ordinaten udaf Polen* skjærer samme Peripherie. Ved mange Linier, som f. Ex. Spiralerne og saadanne krumme Linier, som först efter et vist Antal Omgange löbe tilbage i sig selv, begriber man let, at man erholder Cirkelbuer og dertil svarende Vinkler, som ere större end een Peripherie eller 360°. At denne sidste Forestillingsmaade er vigtig i mechaniske Undersögelser, er ikke mindre bekjendt.

§. 4.

Men disse tvende Forestillingsmaader ere dog ikke de eneste. Man kan, istædet for retlinede Abscisser, vælge krumlinede. Saa har man gjort ved Cycloïden. Maaskee man uden denne Methode ikke saa let skulde have bemærket den saare skjönne Egenskab, hos denne krumme Linie, at den udvikler sig selv. Istædet for Cirkelbuer, som ved Cycloïdens Undersögelse lægges til Grund, lade sig enhver anden krum Linies Buer bruge med Hæld, til at simplificere Udtrykkene. Ordinaterne kunne da tillige have en forskjellig Beliggenhed i Henseende til Axen af den krumme Linie, hvis Buer bruges som Abscisser. Den parallele og den lodrette ere de tvende Arter der her fortjene Fortrinet. — Den alleralmindeligste Forestillingsmaade var den at bestemme Puncterne i den krumme Linie ved tvende eller trende krumme Linier, alt efter som Krumningen var enkelt eller dobbelt. At der paa denne Mark, som endnu ikke er synderlig dyrket, kan samles skjönne Frugter, naar man kun ikke calculerer blindt hen, men idelig har den geometriske Construction for Öjnene, derom synes mig ikke man kan tvivle.

§. 5.

De nylig omtalte Forestillingsmaader ere *reen-geometriske*. De bestemme hvert Punct i den krumme Linie ved *Construction*, og den hele krumme Linie selv ved uendelig mange saadanne Punkter. Imidlertid kan man ogsaa tænke sig en krum Linie beskreven ved et Punkts uafbrudte Bevægelse. Herved frembringes saavel *algebraïske* som *transcendente* krumme Linier. I Henseende til de bekjendte *Keglesnitte* kan man eftersee Francisci a Schootens Exercit. Math. 4de Bog. Hvorledes Cyogloïderne, Epi- og Hypocycloïderne, Spiralerne o. a. fl. beskrives *mechanisk*, er ogsaa bekjendt. Forudsætter man Rectificationer og Quadraturer, saa lade de sidste Arter sig ogsaa construere *geometrisk*. Den formeente Inddeling, som *Cartesius* gjorde, imellem *geometriske* (algebraïske) og *mechaniske* (transcendente) Curver, er derfor hverken logisk eller etymologisk rigtig, og kunde altsaa heller ikke faae de store Mænds, Newton's og Leibnitz's, Bifald.

§. 6.

Af de trende Arter af Bevægelse, hvorved en krum Linie kan fremkomme, er, som vi allerede §. 1. have anmærket, den Huygenske Evolutions-Bevægelse mærkværdig paa Följer. I Almindelighed forestiller man sig denne Evolution saaledes, at en krum Linie AMZ (Fig. 1.) *omvikles* med en fuldkommen böjelig ret Linie, og at denne rette Linie, medens den *afvikles*, stedse udstrækkes saaledes, at den afviklede Deel MN, ifald den blev forlænget til O, dog kun havde Punktet M tilfælles med AMZ. Skeer dette, saa beskriver Endepunktet A en krum Linie ANV, som kaldes en *Evolvente*; AMZ derimod en *Evolute*; MN er Radius osculi til Evolventen i N, den er lodret paa den krumme Linie i N, og man kan ansee Evoluten som det *geometriske Sted* hvor tvende hinanden uendelig nær liggende *Normaler* til Evolventen skjære hinanden.

§. 7.

Men denne Evolution kan og forestilles, uden at man behöver det noget fremmede Begreb om en fuldkommen böjelig ret Linie. ON være en uböjelig ret Linie, som veltes hen over Evoluten AMZ, saa beskriver ikke allene A en Evolvente ANV, men ethvert andet Punkt a eller b sin Evolvente anv, eller bpx.

§. 8.

Fra denne sidste Forestillingsmaade er det nu meget let at gaae over til en langt almindeligere. Istædet for den rette Linie NO (Fig. 1) tænke man sig (Fig. 2) en krum Linie BMV som veltes hen over AMZ, imedens et Punkt L, eller l, som i Henseende til BMV har en uforanderlig Beliggenhed, beskriver Evolventen C L X eller c l x. Skeer dette, saa seer man let:

1) at de afviklede Buer A M og B M ere ligestore.

2) at M L og M l som drages til begge de *genererende Curvers* fælles Berörings-Punkt, ere lodrette paa deres respective Evolventer C L X og c l x.

§. 9.

Definitioner. Af de tvende genererende Curver A M Z og B M V vil jeg kalde den, paa hvilken Udviklingen skeer *Basis* (Basin expositam); B M V, som velter sig hen over Basis, og altsaa ved sin Bevægelse egentlig frembringer Evolventerne C L X, c l x, o. s. v., kalder jeg *Genetrix*, og Puncterne L, l de *beskrivende Punkter* (puncta describentia, lineantia). Vil nogen sætte beqvemmere danske Udtryk istædet for de her valgte, gjör han mig en Fornöjelse.

§. 10.

Laanesaetning. Naar y *betyder en Ordinate i en krum Linie, hvis Ordinater, efter den* §. 3. *anförte anden Methode löbe sammen i et fælles Punkt, og* d y *denne Ordinates Differential,* d p *derimod Differentialet af Perpendiklen paa Tangenten fra den krumme Linies Pol, saa er Röre-Cirklens Radius* $= \frac{y\,dy}{dp}$.

Et let Beviis for denne Formel kan eftersees i Le Seurs og Jacquiers Commentairer over Newtons Princ. Phil. Nat. Math. Tom. 1. pag. 109. not. 214. i Udgaven af 1760.

§. 11.

Almindelig Læresætning. (Fig. 3.)

Den krumme Linie AMZ *være den Basis, som Genitrix* BM *berörer i* M. *Ved Evolutionens Fortsættelse komme den sidste Curve i Beliggenheden* bqm, *som her antages uendelig lidet forskjellig fra* BM. N *være det beskrivende Punct og* bq = BM. *Man drage de rette Linier* BM *og* bq, *og gjöre* △ bqn *identisk med* △ BMN, *saa er* Nn *et Element af Evolventen* ENnG. *Normalerne* NM *og* nm *forlænge man til* R *og gjöre* Rm = Ro. *Ligeledes være* CM = Cm *Radius Osculi til Buen* Mm, *og* Cm *forlænget skjære Tangenten* NF *i* F. *Endelig være* DM = Dm *Radius Osculi til Elementet* qm; *og med Radio* nq *beskrive man Buen* qr; *saa siger jeg, at*

Radius Osculi til ethvert Punkt i Evolventen (NR) *forholder sig til Afstanden imellem de genererende Curvers fælles Berörelses-Punkt og den til Evolventen hörende Röre-Kredses Centrum* (MR), *som Rectangelet af Afstanden imellem de til de genererende Curvers fælles Berörelsespunkt hörende Röre-Kredses Middelpunkter med Afstanden* mF (CD . mF) *til Rectangelet af disse tvende Kredsers Radier* (CM . DM)

det er: NR : MR = CD . mF : CM . DM.

Beviis.

I) Mm = qm fordi BM = bq, og Bm = bm.

II) Rm = Ro og Rn = RN, efter Forudsætningen.

III) △ BNM = og ∼ △ bqn; altsaa NM = nq = nr.

IV) $No = nm$, $NM = nr$; altsaa $No - NM = nm - nr$, det er, $Mo = mr$.

V) $\angle o = \angle r = 90^\circ$ og $Mm = qm$ (I); desuden $Mo = mr$ (IV); fölgelig er $\triangle Mom =$ og $\sim \triangle mqr$. Heraf fölger $mo = qr$.

VI) Nu ere Vinklerne $MRm + CmR = MCm + CMR$.

VII) Naar nu Punkterne q og M falde sammen, bliver

$$nqD = CMR.$$

Anm. Naar q og M falde sammen, falder n paa N og nq paa NM, det er, paa den forlængede RM. Fremdeles bliver Dq, som er lodret paa qm, til en Deel af den forlængede CM, som er lodret paa Mm, fordi disse tvende Elementer i saa Tilfælde falde sammen. Altsaa bliver nqD Topvinklen til CMR, eller $nqD = CMR$

VIII) Altsaa har man

$$MRm + CmR = MCm + nqD$$

eller $MRm + nmD = MCm + nqD$.

IX) Fremdeles ere $qDm + nmD = nqD + qnR$ eller qnr

X) Altsaa $MRm - qDm = MCm - qnr$

eller $MRm + qnr = MCm + qDM$.

XI) Men Vinklerne forholde sig directe som Buerne, og omvendt som Radierne, hvormed disse Buer beskrives i Vinklerne; altsaa

$$\frac{mo}{RM} + \frac{mo}{NM} = \frac{Mm}{Cm} + \frac{Mm}{Dm}$$

fordi $\frac{mo}{NM} = \frac{qr}{nq}$ ifölge (V).

XII) Heraf udledes endelig

$$\frac{mo.NM + mo.RM}{NM.MR} = \frac{Mm.Dm + Mm.Cm}{Cm.Dm}$$

det er $\frac{NR.mo}{NM.MR} = \frac{CD.Mm}{Cm.Dm}$.

XIII) Men $nmF + nmq = 90^{\circ} = mnF = nmF + mFn$ altsaa er $\triangle mqr \sim \triangle mnF \sim \triangle Mom$; hvoraf atter fölger at Siderne

$$Mm : mo = mq : qr = mF : mn \text{ eller } MN$$

altsaa $mF = \frac{MN.Mm}{mo}$

XIV) Af (XII) fölger, at

$$\frac{NR}{MR} = \frac{CD}{Cm.Dm} \cdot \frac{NM.Mm}{mo}$$

altsaa, i Fölge (XIII) ogsaa

$$\frac{NR}{MR} = \frac{CD.mF}{Cm.Dm} = \frac{CD.mF}{CM.DM}$$

XV) Af dette sidste Udtryk flyder directe den i Læresætningen fremsatte Proportion:

$$NR : MR = CD.mF : CM.DM.$$

som var at bevise.

§. 12.

I den nylig beviiste almindelige Læresætning ligge mange andre deels bekjendte, deels ogsaa ubekjendte Sætninger, hvilke vi nu ville udlede af samme som Fölgesætninger. For Ordenens Skyld gjennemgaaer jeg först dem, der beroe paa den forskjellig antagne *Basis*; dernæst undersöger jeg, hvad der fölger naar man antager forskjellige *Genitricer*.

§. 13.

Naar Basis er en ret Linie, bliver CM = Cm uendelig stor; altsaa CM = CD. Dette forandrer Hoved-Analogien til

$$NR : MR = Fm : DM$$

eller $NR : MR = FM : DM$ (Fig. 4)

altsaa $NR : NR - MR = FM : FM - DM$

det er: $NR : NM = FM : DF$

eller $NR \times DF = NM \times FM$

Nu fælde man DH lodret paa NM, saa er:

$$FM : DF = NM : NH$$

fölgelig $NR : NM = NM : NH$.

som giver fölgende almindelige

Læresætning. Naar en krum Linie BMV *væltes hen over en ret Linie* AZ, *saa er Radius Osculi til ethvert Punkt i Evolventen den tredie Proportionale til det Stykke, af den paa samme Evolvente til samme Punkt dragne Normale, som afskjæres ved en Perpendikel fra den til de genererende Liniers fælles Berörelsespunkt hörende Rörekredses Centrum, regnet fra Evolventens Peripherie af*, (*altsaa til* NH) *og det*

Stykke af Normalen, som ligger imellem det givne Punkt i Evolventen og de genererende Liniers fælles Berörelsespunkt, NM.

Anm. Da denne Egenskab er almindelig, tilkommer den ogsaa Cycloïderne, saavel de *almindelige*, som de *udvidede* og *sammentrukne* (cycloïdes ordinariæ, elongatæ et curtatæ). I den almindelige Cycloïde er FM = 2 DM den genererende Cirkels Diameter. Da nu

$$NR : MR = FM : DM$$

ifölge den anden Proportion i denne §. saa er $NR = 2MR = 2NM$; en Fölge, om hvis Rigtighed man let kan overbevise sig, naar man f. Ex. med Opmærksomhed betragter den af Wolf, Elem. Math. univ. Tom. 1. Anal infin. paa den dertil hörende Tab. III. tegnede 39te Figur, i Udgaven af 1742.

§. 14.

Naar Basis er en Cirkel, bliver CM bestandig, altsaa NR som $\frac{CD \times MF \times MR}{DM}$ (Fig. 5). Endelig er $NR = \frac{CD \times MF \times NM}{CD \times MF - CM \times DM}$ det Udtryk hvoraf NR bör bestemmes.

§. 15.

Er Genitrix en ret Linie, saa bliver DM uendelig stor, og man kan da sætte DM = DC; dette forandrer Hoved-Analogien til

$$NR : MR = MF : CM. \text{ (Fig. 6)}$$

$$\text{eller } NM : 0 = \infty : CM$$

Men heraf fölger intet, end hvad som allerede er bekjendt, nemlig, at

$$\frac{o}{NM} = \frac{CM}{\infty} = o.$$

§. 16.

Er Genitrix en Cirkel, saa er DM bestandig. Antages nu (Fig. 7)

1) Det beskrivende Punkt i Peripherien; saa bliver $MF = 2DM$.

altsaa $NR : MR = 2CD : CM$

eller $NR : NM = 2CD : CM + 2DM$

det er: $NR : NM = 2CM + 2DM : CM + 2DM$

Man tage $CL = CM$, saa bliver

$$NR : NM = FL : FC$$

Anm. Forlanger man at Evolventen skal være en ret Linie, saa maa NR blive $= \infty$, eller $CM + 2DM = o$, det er $CM = -2DM$ eller $DM = -\frac{1}{2}CM$. Da nu DM er bestandig, maa ogsaa CM være det; altsaa Basis en Cirkel, hvis Radiuer lig Genetricens Diameter. Tillige maa Bevægelsen skee paa den concave Side. Dette Tilfælde forestiller Fig. 8. Da dette allerede ved andre Methoder er Geometrerne bekjendt, viser det den her fremsatte Sætnings Overeensstemmelse med andre paa andre Veje fundne Sandheder; en Overeensstemmelse, paa hvilken der i det fölgende vil forekomme endnu flere Exempler.

2) Antages derimod det beskrivende Punkt at være Genetricens Centrum, da bliver $NM = FM = DM$ fordi

N, F og D da falde sammen, altsaa erholdes af XV. §. 11.

$$NR : MR = CD : CM$$

fölgelig $NR : NM = CD : DM$

eller $NR = CD$. Fig. 9.

Hvoraf flyder tillige, at *naar de til tvende krumme Linier henhörende Radii Osculorum bestandig skjære disse Curvers Axer under ligestore Vinkler, Intersectionerne i begge Curver ligge ligelangt fra deres respective Abscissers Begyndelsespuncter, og Radierne eller Normalerne tillige differere om en bestandig Störrelse, saa er den ene fremkommen af den anden ved Evolution, og den dertil hörende Genitrix er en Cirkel.*

Exempel. (*Fig.* 9.)

Man tænke sig under GEDe og BMW tvende Paraboler, hvis Toppunkter ere G og B. Deres Parametre være A og a, $GB = \delta$, $GP = x$, $PM = y$, $GQ = v$, $QD = z$, saa er

$$PM^2 = a(x - \delta) = y^2$$

og $QD^2 = Av = Z^2$

altsaa $PM^2 : QD^2 = ax - a\delta : Av$

Men $PM^2 : QD^2 = PV^2 : QV^2 = a^2 : A^2$

Altsaa $a^2 Av = A^2 ax - A^2 a\delta$

eller $av = Ax - A\delta$

følgelig $x - \delta = \frac{av}{A}$ og $y^2 = \frac{a^2 v}{A}$

som igjen giver:

$$VD = \sqrt{Av + \frac{A^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{A} \, . \, \sqrt{4v + A}$$

$$\text{og} \quad VM = \sqrt{\frac{a^2 v}{A} + \frac{a^2}{4}} \quad \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{A}} \, . \, \sqrt{4v + A}$$

$$\text{altsaa } DM = \frac{A - a}{2\sqrt{A}} \, . \, \sqrt{4v + A}$$

Heraf sees at DM er en foranderlig Störrelse, og at Parabolen GEDe altsaa ikke kan beskrives ved Middelpunctet af en Cirkel D, hvis Peripherie vælter sig hen over en anden Parabol BM. Paa en lignende Maade kan man undersöge, om enhver anden Curve E kan beskrives ved en Cirkels Bevægelse hen over en anden given Curve B. Men jeg forlader dette for at begive mig til langt almindeligere Undersögelser.

§. 17.

Ere de genererende Curver Cirkler, (Fig. 10 og 11) saa veed man at Evolventerne blive Epi- og Hypocycloïder.

Men $MF = 2\,DM$. Dette giver:

$$NR : MR = 2CD : CM$$

$$= 2CM + 2DM : CM$$

$$\text{altsaa } NR : NM = 2CD : CM + 2DM$$

$$\text{eller } NR : NM = 2CD : CF$$

Fælder man CO og DP lodret paa NMR, og forlænger NR til S, saa bliver $MP = \frac{1}{2}MN$ og $MO = \frac{1}{2}MS$, altsaa $NS = 2PO$. Heraf erholdes

$$NR : NM = 2CD : CF$$

$$= 2PO : ON$$

$$= NS : NO$$

$$\text{eller } NR = \frac{NM \times NS}{NO} = \frac{2NM \times NS}{MN \pm NS} = \frac{4(R \pm r)\, r \,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\phi}{R \pm 2r} = a \sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

naar R og r forestille Basens og Genitricens Radier, ϕ den Vinkel, som i Genitricen svarer til den afviklede Bue NLM og a den bestandige Störrelse $\frac{4(R \pm r)r}{R \pm 2r}$. Heraf flyder ligefrem fölgende

Læresætning. I de sædvanlige Epicycloïder, (som til Ære for vores Landsmand Roemer, der erkjendte og viiste deres mechaniske Nyttte, ogsaa stundom kaldes Römerske, Epicycloïdes Roemerianæ) *og Hypocycloïder forholde Rörekredsenes Radier sig som Sinusserne af de halve afviklede Buer af Genitricen.*

Fölgesætninger.

1) Naar Genitricens halve Peripherie er afviklet, det er, naar $\phi = 180°$, bliver Radius Osculi störst, nemlig $= a = 4\,\frac{R \pm r}{R \pm 2r} \cdot r$

2) Da Sinus af $90° + \frac{1}{2}\xi$ = Sinus af $90° - \frac{1}{2}\xi$; saa ere de Radii Osculorum, som svare til lige langt fra det den störste Rad. Osc. tilhörende Punkt beliggende Punkter, ligestore, det er, den störste Radius Osculi er en forlænget Diameter af den krumme Linie.

3) Sættes $R = nr$, altsaa $a = 4 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot r$, og $r = 1$, saa bliver $NR = 4 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \sin . \frac{1}{2}\varphi$; det er,

α) for Eyicycloïden $= 4 \frac{n+1}{n+2} \sin \frac{1}{2} \phi$, og

β) for Hypocycloïden $= 4 \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \sin . \frac{1}{2} \phi$.

4) For Epicyogloïden og Hypocycloïden er

γ) $Nr = 2 \sin . \frac{1}{2} \phi$ naar $n = 0$, og

δ) $NR = 4 \sin . \frac{1}{2} \phi$ naar $n \infty$.

I det förste Tilfælde er $r = \frac{R}{n} = \frac{R}{0} = \infty$, altsaa *Genitrix* en ret, Linie. Kalde nu den afviklede Bue selv v, saa er $\phi = \frac{v}{r}$, altsaa en uendelig liden Störrelse; fölgelig er $\sin . \frac{1}{2} \phi = \frac{1}{2} \phi$, altsaa $Nr = 2 \sin \frac{1}{2} \phi = \varphi = 1 . \phi = r . \phi = v$; det er, Rad. Osc. er = den allerede afviklede Deel af den rette Linie, som genererer Evolventen.

Anm. Denne Evolvente har adskillige mærkværdige Egenskaber, som jeg ved en anden Lejlighed skal have den Ære at meddele det K. V. S.

I det andet Tilfælde er $r = o$, altsaa $a = o$, fölgelig $NR = o$.

5) For Hypocycloïderne bliver

ε) $NR = o$, naar $R = r$, som og maa være, da i dette Tilfælde Evolutionen ikke engang kan have Sted.

ζ) $NR = \infty$, naar $R = 2r$, det er Evolventen er en ret Linie, nemlig Basens Diameter. See §. 16. 1.

§. 18.

Vi komme nu til et af de vigtigste specielle Tilfælde i denne Materie, det nemlig, hvor Basis er identisk med Genitrix og det beskrivende Punkt N er homolog med A, Ordinaternes Pol for Basis BMZ. I dette Tilfælde blive stedse $CM = DM$, altsaa

$$NR : MR = 2MF : CM$$

Man afsætte $MH = MF$, og drage AH, saa sees let

1) at $\triangle AMH =$ og $\sim \triangle NMF$

2) at $\angle AMC = \angle CMR$

3) at $AN = 2AK$, naar MKT er Tangenten til de genererende Curver i M, og K det Punkt, hvori AN skjærer denne Tangente.

§. 19.

Af $NR : MR : = 2MF : CM$, erholdes da ogsaa let

$$NR : NM = FH : FH - CM$$

§. 20.

Deler man ved O Linien CM i tvende ligestore Dele, saa erholdes ogsaa

$$NR : NM = MH : MH - MO$$

det er $NR : NM = MH : HO$

eller $NR = \frac{NM \times MH}{HO}$

§. 21.

Er den krumme Linie af den Beskaffenhed, at HO stedse bliver $= 0$, saa bliver Evolventen en ret Linie. For at finde denne krumme Linie, maa man mærke, at $\triangle AKM \sim \triangle AMH$, altsaa

$$AK : AM = AM : MO \text{ eller } MH$$

fölgelig $CM = 2MO = \frac{2AM^2}{AK}$

Man sætte $AM = y$ og $AK = p$, saa er

Radius Osculi $= \frac{2y^2}{p} = \frac{ydy}{dp}$ §. 10.

hvoraf erholdes $\frac{dp}{p} = \frac{\frac{1}{2}dy}{y}$

eller $2 \log . p = C + \log . y$

hvoraf igjen fölger $p^2 = ay$, naar $C = \log . nat . a$ antages for den ved Integrationen forsvundne Störrelse. Sættes nu V.

BAM$=\phi$, saa veed man at $dy : y d\phi = y$: Subtangenten, som altaa bliver $= \frac{y^2 d\phi}{dy}$. Fölgelig er $p = \frac{\text{Subt.} \times y}{\sqrt{y^2 + \text{Subt.}^2}} =$

$\frac{y^3 d\phi : dy}{y\sqrt{dy^2 + y^2 d\phi^2 : dy^2}} = \frac{y^2 d\phi}{\sqrt{dy^2 + y^2 d\phi^2}} = \sqrt{ay}$, hvoraf sluttes:

$d\phi = \frac{dy\sqrt{a}}{y\sqrt{y-a}}$, en Ligning som gives integrabel ved at substituere $\frac{z^2}{a}$ istædet for $y - a$, eller $z^2 = a(y-a)$, hvoraf erholdes

$$y = \frac{a^2 + z^2}{a},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2z\,dz}{a^2 + z^2},$$

$$\text{altsaa } d\phi = \frac{dy\sqrt{a}}{y\sqrt{y-a}} = \frac{a\,dy}{y\sqrt{ay - a^2}} = \frac{2a\,dz}{a^2 + z^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{dz}{a}}{1 + \frac{z^2}{a^2}}$$

som giver $\phi = 2A . tg . \frac{z}{a} + \text{Const.}$

Denne bestandige Störrelse kan bestemmes saaledes at $y = a$, naar $\phi = 0$, altsaa, naar $z = 0$, maa man sætte $\phi = 0$, fölgelig Const. $= 0$. Dette giver endelig

$$z = a \text{ tg. } \tfrac{1}{2}\,\phi$$

altsaa $z^2 = a(y-a) = a^2 \,.\, tg.^2 \tfrac{1}{2}\phi$

det or $y = a \, Sec.^2 \tfrac{1}{2}\phi \cdot = \frac{a^2 \,.\, Sec.^2 \frac{1}{2}\phi}{a}$.

og heraf fremdeles $p = \sqrt{a\,y} = a \, Sec. \tfrac{1}{2}\phi$

Videre Cosinus af den Vinkel, som p gjör med y, $= \frac{p}{y} = \frac{a \, Sec. \frac{1}{2}\phi}{a \, Sec.^2 \frac{1}{2}\phi} = \cos. \tfrac{1}{2}\phi$, eller Vinklen selv $= \tfrac{1}{2}\phi$. Den samme Vinkel gjör p altsaa med a, fordi ϕ er den imellem a og y indsluttede Vinkel. Dette er nok til at indsee, at den sögte Curve er en Parabole, og det beskrivende Punkt dets Brændepunkt; en Sætning, som strax kunde udledes af $p^2 = a\,y$, en Egenskab, som Newton beviser i Princ. Phil. Nat. Lib. I. Lemma XIV. Det sees ligeledes let, at den beskrevne rette Linie er Parabolens saa kaldte Directrix.

§. 22.

Af §. 18. No. 2. har man seet at Vinklerne AMC og CMR ere ligestore (Fig. 12.) MR er altsaa den Vej, som en fra det lysende Punkt A udgaaende Lysstraale, formedelst Reflexionen, maatte tage. Tænker man sig et i Basis ved M uendelig nær liggende m, saa vilde Am ligeledes kastes saaledes tilbage fra den krumme Linie ved Mm, at Lysstraalen mR vilde foreene sig med MR i R, Middelpunktet til den Cirkel, som falder nærmest sammen med Evolventen i Nn, naar Rm forlænget skar Evolventen i n. Alle tilbagekastede Straaler som MR, mR, o. s. v., vilde da, ved Intersectionerne af hvert hinanden uendelig nær liggende Par, danne en krum Linie VR, som er en Evolute til Evolventen NG, men tillige i optisk Forstand kaldes den krumme Linie BMZ's *catoptriske Brændelinie*, *Catacaustica*, *Caustica per reflexionem*, for at adskille den fra en anden Art af Brændelinie, som faaer Navn af den *dioptriske Brændelinie*, *Diacaustica*, *Anaclastica*, *Caustica per Refractionem*.

§. 23.

Omvendt: kjender man de tilbagekastede Straalers *geometriske Sted*, saa giver en let Construction Punkterne i Evolventen, som beskrives, naar Basis omvendt væltes saaledes hen over sig selv, at homologe Punkter stedse beröre hinanden. Man behöver blot at forlænge den tilbagekastede Straale PM indtil MN = MA, efterat man ved den rette Linie MC har deelt V. AMR i ligestore Dele, drager man AH lodret paa AM, forlænger CM og gjör MF = MH. Endelig drage man FN, saa er N et Punkt i Evolventen, og NF en Tangente dertil. Beviset for denne Construction forbigaaer jeg, da det for sin Letheds Skyld neppe behöves.

§. 24.

Veed man altsaa i særdeles Tilfælde at bestemme Beliggenheden og Störrelsen af den tilbagekastede Straale MR, saa er, i Fölge §. 18:

$$NR : MR = 2\,MF : CM$$

en meget brugbar Proportion, hvorpaa nogle af de fölgende §§. give nærmere Beviis.

§. 25.

Da NR er Radius Osculi til Evolventen NG, saa sees

1) *At Parabolens Evolvente, beskreven ved dens Brændpunkt, er en ret Linie;* thi MR er, som bekjendt, parallel med Axen, altsaa uendelig stor, fölgelig er ogsaa $NR = NM + MR = \infty$, altsaa Evolventen en ret Linie, overeensstemmende med det §. 21. fundne.

2) *At Ellipsens og Hyperbolens Evolventer, beskrevne ved Brændpunkterne, ere Cirkler;* thi ved Ellipsens Evolution er Radius Osculi $NR = NM + MR = AM + MR =$ Ellipsens store Axe, altsaa en uforanderlig Störrelse; fölgelig er den Evolvente som en Ellipse beskriver med sit Brændpunkt, en Cirkel. Ved Hyperbolen bliver RM negativ, det er, R og N komme til at ligge paa samme Side af M, og R bliver Hyperbolens andet Brændpunkt, (her egentlig et *Adspredelsespunkt, focus virtualis*), og Radius Osculi bliver $NR = MR - MN = MR - AM =$ Hyperbolens store Axe.

§. 26.

Den sidste at de §. 24. fremsatte Proportioner fandt ogsaa Jac. Bernoulli, endskjönt han paa det anförte Sted (See ogsaa Act. Erud. Lips. 1692. pag. 207) ikke synes at udstrække videre end til Epi- og Hypocycloïderne. Det kan derfor ikke være Mathematikens Dyrkere, især dem der ynde den synthetiske Methode, ubehageligt at see de for Keglesnittenes Rad. Oscul. bekjendte Udtryk udledede af denne Proportion, for deri at finde et nyt Beviis saavel paa det §. 11. fremsatte Theorems Udstrækning, som paa dets nöje Overeensstemmelse med andre forhen fundne Sandheder. Dertil betjener jeg mig af fölgende:

Laanesætninger. (*Fig.* 13 *og* 14).

I) I enhver Ellipse eller Hyperbole er Produktet af Perpendiklerne paa Tangenten liig Quadratet af den coniske Sections mindre Axe, eller $Ff \times Gg = CD^2$.

II) Naar MN er lodret paa Tangenten i M og man fælder Perpendiklerne NE paa Bærelinierne FM og GM, blive de imellem disse Perpendikler og M liggende Stykker liig Keglesnittets halve Parameter; eller $ME = \frac{CD^2}{CA} = \frac{1}{2}L$, naar Parametren sættes $= L$.

III) $FM : MN = Ff : \frac{1}{2}L$, og

$$GM : MN = Gg : \frac{1}{2}L.$$

Thi Trianglerne MEN, FMf og GMg ere ligedanne, altsaa

$$FM : Ff = MN : ME = MN : \tfrac{1}{2}L$$

og $GM : Gg = MN : ME = MN : \frac{1}{2}L$

Anm. De synthetiske Beviser for I og II finder man i Noterne til Newtons Princ. Phil. Nat. Math. Lib. 1. Prop. X. Coroll. 1. not. 235 og 236 i Le Seur og Jacquiers Udgave af 1760. Af III. fölger den smukke Egenskab, at *Normalen forholder sig til den geometriske Middelproportionale imellem Bære-Linierne, ligesom den mindre Axe til Hoved-Axen*; thi ved at multiplicere de corresponderende Led i Proportionerne III. erholder man

$$FM.GM : Ff.Gg = MN^2 : \tfrac{1}{4}L^2$$

$$\text{altsaa } MN : \sqrt{FM.GM} = \tfrac{1}{2}L : \sqrt{Ff.Gg}$$

$$= \frac{CD^2}{CA} : CD . \text{(I)}$$

$$= CD : CA :$$

Dette, som mangfoldige andre Exempler, beviser her at den analytiske Vej ikke altid har Fortrinet i Henseende til Letheden og Kortheden, hvorom man let kan overtyde sig, naar man söger det analytiske Beviis for den sidste her anförte Læresætning.

§. 27.

Læresætning. I Ellipsen og Hyperbolen er Radius Osculi liig Cubo af Normalen, divideret med Quadratet af den halve Parameter.

Beviis.

I) Den Evolvente som en Ellipses eller Hyperboles Brændpunkt beskriver ved Evolutionen, er en Cirkel, hvis Radius er den coniske Sections store Axe. §. 25, n 22, og disse Curvers catoptriske Brændelinier ere deres Brændpunkter, nemlig de Brændpunkter, som modsættes de med de beskrivende Punkter homologe lysende Punkter.

II) Nu er $RM + MA : NR = 2MF : CM$. §. 19.

Anvendes denne Proportion paa Fig. 15 og 16, saa erholdes:

$GM \pm MF : GM = 2MO : RM$, Radius Osculi til den coniske Section i M; altsaa

$$AB : GM = 2MO : RM$$

eller $CA : GM = MO : RM$

III) Man drage $FO =$ (Fig. 16 og 17) lodret paa FM, saa bliver MO her, hvad $MH = MF$ var Fig. 12, det er:

$MO = \frac{FM^2}{FQ}$, eller $FA : FM = FM : MO$, hvoraf

fölger $FQ^2 : FM^2 = FQ : MO$

IV) Men i Fölge Laanesætningen er:

$FM : MN = FQ : \frac{1}{2} L$ naar L betegner Sectionens Parameter;

altsaa $FQ^2 : FM^2 = \frac{1}{4} L^2 : MN^2$

fölgelig og $FQ : MO = \frac{1}{4} L^2 : MN^2$

V) Ligeledes er i Fölge Laanesætningen:

$$GM : MN = GS : \tfrac{1}{2} L$$

$$= GS : \frac{CD^2}{CA}$$

$$= GS : \frac{FQ . GS}{CA}$$

$$= CA : FQ$$

VI) Da altsaa $CA : GM = MO : RM$. (II)

og $GM : MN = CA : FQ$

saa er $CA : MN = CA \times MO : FQ \times RM$

eller $MN \times MO = FQ \times RM$

altsaa $FQ : MO = MN : RM$

Men $FQ : MO = \frac{1}{4} L^2 : NM^2$ (IV)

altsaa $\frac{1}{4} L^2 : MN^2 = : MN : RM$

det er: $RM = \frac{MN^3}{\frac{1}{4} L^2}$. H. sk. b.

Anm. Heraf kunde man allerede slutte, at den samme Proportion:

$$\tfrac{1}{4}L^2 : MN^2 = MN : RM.$$

ogsaa maae tilkomme Parabolen. Desuagtet er det got, for Fuldstændighedens Skyld at tilföje et eget Beviis for Sætningens Gyldighed, naar den anvendes paa denne koniske Section. Dette skeer i fölgende

§. 28.

Laanesætning. I enhver Parabole er Radius liig Cubo af Normalen divideret med Quadratet af den halve Parameter Fig. 17.

Beviis.

I) I Parabolen löbe de fra Brændpunktet F udgaaende Straaler efter Tilbagekastningen fra den rette Linie som berörer Parabolen i M, parallelle med Axen; altsaa maa man sætte $GM = \infty$, hvorved Proportionen:

$$GM \pm FM : GM = 2MO : RM \text{ §. 27. II.}$$

forvandles til:

$$GM : GM = 2MO : RM$$

det er: $RM = 2MO$.

II) Man fælde FQ lodret paa Tangenten TM fra Brændpunktet F, og drage FO lodret paa FM, saa er:

$$AF : FQ = FQ : FM = FM : MO$$

altsaa $AF^3 : FQ^3 = AF : MO$

III) Nu er i enhver Parabole $MN = 2FQ$, og $AF = \frac{1}{4} L$ naar Parametren sætses $= L$; altsaa er:

$$\tfrac{1}{64} L^3 : \tfrac{1}{8} MN^3 = \tfrac{1}{4} L : MO$$

$$= \tfrac{1}{2} L : 2MO$$

$$= \tfrac{1}{2} L : RM$$

fölgelig $RM = \frac{MN^3}{\frac{1}{4}L^2}$

eller $\frac{1}{4} L^2 : MN^2 = MN : RM$. H. sk. b.

§. 29.

Læresætning. I enhver conisk Section er Radius Osculi liig Cubo af Normalen. Divideret med Quadratet af Sectionens halve Parameter.

Beviis.

For Ellipsen og for Hyperbolen er denne Sætning beviist i §. 27. For Parabolen i foregaaende §. Altsaa gjelder den for alle Kegle-Snittene. H. sk. b.

§. 30.

I Parabolen er $AF : FQ = FQ : FM$

eller $4\,FQ^2 = L . FM$

altsaa $MN^3 = 8 . FQ^3 = L . \sqrt{L} \times FM . \sqrt{FM}$

fölgelig $RM = \frac{4\,FM . \sqrt{FM}}{\sqrt{L}}$.

Af dette temmelig simple Udtryk kunde man betjene sig til at bestemme den krumme Linie, hvis *Cycloïdale* er en Parabole; saaledes vil jeg nemlig for Kortheds Skyld kalde *den Evolvente, som frembringes af tvende identiske genererende Curver.* Genitricens Navn og det beskrivende Punkts Beliggenhed characterisere en saadan Cykloïdale endnu nærmere. Saaledes er *Parabolens Cykloïdale ved Brændpunktet* en ret Linie; *Ellipsernes og Hyperbolernes Cykloïdaler ved Brændpunkterne* Cirkler, o. s. v. Dog lader Sagen sig endnu lettere afgjöre ved fölgende Forestilling:

pNq (Fig. 18) være den med N beskrevne Parabole, og BMZ, bMZ de genererende Curver, A det til N svarende homologe Punkt. Man drage AM og NM til de genererende Curvers fælles Berörelsespunkt M, og forlænge NM indtil den bliver liig den til N hörende Radius Osculi = RN. Desuden være CM Radius Osculi for det til Basis henhörende Punkt M; denne Radius skjæres i S af den paa AM lodrette Linie AS, ligesom NR i O af den paa AN lodrette Linie AO. Jeg antager endelig, at A tillige er den beskrevne Paraboles Brændpunkt. Dette forudsat, vil man af det Foregaaende kunne see, at $RN = 2\,ON = 4\,NM = 4\,AM$, fordi KM og AO ere parallele og $AK = KN$. Altsaa $RM = 3\,AN$. Da nu

$$NR : MR = 2MS : CM \text{ §. 24.}$$

saa er $4 : 3 = 2MS : CM$

eller $CM = \frac{3}{2} MS$

Men $AK = p$ er Perpendiklen paa Tangenten, og $AM = y$ er Ordinaten af Polen, og $p : y = y : MS$

det er $MS = \frac{y^2}{p}$

altsaa $CM = \frac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{p} = \frac{y\,dy}{dp}$ (§. 10)

heraf fölger: $\frac{3\,dp}{p} = \frac{2\,y\,dy}{y^2}$

altsaa $\log. p^3 = \log. a y^2$

fölgelig $p^3 = a y^2$, eller $p = a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

Men p er tillige $= \frac{y^2\,d\phi}{\sqrt{dy^2 + y^2\,d\phi^2}}$ (§. 21.)

altsaa $\frac{y^4\,d\phi^2}{dy^2 + y^2\,d\phi^2} = a^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{4}{3}}$

For at integrere denne Ligning, sætter jeg $a = b^3$ og $y = z^3$, saa erholder jeg

$$\frac{z^{12}\,d\phi^2}{9z^4\,dz^2 + z^6\,d\phi^2} = b^2 z^4 \text{ eller } \frac{z^8\,d\phi^2}{9\,dz^2 + z^2\,d\phi^2} = b^2 z^4$$

det er $z^4\,d\phi^2 = 9\,b^2\,dz^2 + b^2 z^2\,d\phi^2$

eller $d\phi = \frac{3\,b\,dz}{z\sqrt{z^2 - b^2}} = \frac{3\,b\,z\,dz}{z^2\sqrt{z^2 - b^2}}$.

Sætter man $z^2 - b^2 = t^2$ eller $z^2 = b^2 + t^2$, saa erholdes:

$$d\,\phi = \frac{3\,b\,t\,d\,t}{(b^2+t^2)\,t} = 3 \,.\, \frac{b\,d\,t}{b^2+t^2};$$

hvis Integral er:

$$\phi = 3\ A\,.\,\text{tang}\,.\,\frac{t}{b} = 3\,A\,.\,\text{tg}\,.\,\frac{\sqrt{z^2-b^2}}{b}$$

eller $\phi = 3\ A\,.\,\text{cosin}\,.\,\frac{b}{z} = 3\ A\,.\,\cos\,.\,\sqrt[3]{\frac{a}{y}}$

følgelig $\sqrt[3]{\frac{a}{y}} = \cos\,.\,\frac{\phi}{3}$

eller $y = a\ \sec.^3\,\frac{\phi}{3}$.

Anm. Naar $\phi = 0$, bliver $y = a$. Antager man nu a for den fjerde Deel af Parabolens Diameter, saa er AB, eller den rette Linie fra Brændpunktet til Evolutionens Begyndelsespunkt, tillige den rette Linie, fra hvilkeu Ordinaternes Afvigelse er $= \phi$. Nu er

$$\phi = 3\,A\cos.\,\sqrt[3]{\frac{a}{y}} = 3\,A\cos.\,\sqrt[3]{\frac{p^3}{y^3}} = 3\ A\ \cos.\ \frac{p}{y}$$

det er Vinkelen KAM $= \frac{1}{3}$ BAM.

Det er ellers ikke usandsynligt, at denne krumme Linie har flere skjönne Egenskaber. Den videre Undersögelse af samme vil jeg for det förste forbigaae. Det er mig nok at have viist, at

Den krumme Linie, hvis Natur udtrykkes ved $y = a\,sec.^3\,\frac{\phi}{3}$,

har fölgende Egenskaber: 1) Dens Ordinaters Quadrater forholde sig som Cuberne af Perpendiklerne paa Tangenterne. 2) Dens Radii Osc. derimod, som Quadraterne af disse Perpendikler. 3) Vinklen imellem Ordinaten og Perpendiklen paa Tangenten er altid en Trediedeel af Ordinatens Afvigelse fra AB. *4) Ligeledes er den udgaaende Straale en Trediedeel af den tilbagekastede* RM, *som ligger imellem den krumme Linie og dens Brændlinie; og 5) Dens Cycloïdale er en Apolloniansk Parabole.*

§. 31.

Naar Basis er en logaritmisk Spirale Fig. 19, saa er Vinklen imellem Ordinaten, AM, og Perpendiklen paa Tangenten, AK, af en uforanderlig Siorrelse. Er nu NG dens Cycloïdale, saa drage man TN, som berörer den i N og AL lodret paa TN, saa er

$$\angle \mathrm{LAN} = \angle \mathrm{ANM} = \angle \mathrm{NAM}.$$

altsaa er ikke allene Vinkelen LAN bestandig, men endog af samme Störrelse, som NAM = KAM. *Evolventen er altsaa den selvsamme Spirale eller identisk med Basis og med Genitrix.* Disse tvende have altid under Evolutionen en modsat Beliggenhed. Evolventen derimod har i Henseende til Basis en uforanderlig Beliggenhed, fordi dens Ordinate AN stedse afviger, om en bestemt Vinkel fra den dertil svarende Ordinate AM.

Man beskrive med Radio AM en Cirkelbue, som skjærer Basis i Q, saa bliver AQ = AN = 2AK. Nu har AK, altsaa og AQ = 2AK, et bestandigt Forhold til AM; altsaa er ogsaa Vinklen MAQ bestandig; og da det samme gjelder om Vinkelen MAN, saa er NAM + MAQ = NAQ uforanderlig. Cycloïdalen og dens Basis ligge altsaa saaledes imod hinanden, at tvende homologe Punkter, seet fra Polen, stedse have den samme apparente Afstand NAQ.

Anm. Man veed hvormeget Opdagelsen af denne Egenskab hos den logarithmiske Spirale glædede *Jacob Bernoulli*, at han endog valgte den som et Sindbillede paa Opstandelsen at sættes paa sin Gravsteen, med Overskriften:

Eadem mutata resurgo.

Man veed ogsaa, at foruden Cycloïden endnu en af Tschirnhausen (Act. Erud. Lips. Nov. 1682) bekjendtgjort Linie tager

Deel i denne Egenskab. De analytiske Undersögelser over denne Materie, hvoraf Hr. Hof-Raad *Kæstner*, (Anfangsgr. der Anal. des Unendl. §. 578 — 593 og pag. 525 — 545, 2den Udg.) har meddeelt et concentreret Udtog, vise at kun disse tre Linier have den omtalte Egenskab, en Indskrænkning som dog kun gjelder, naar Genitrix er en ret Linie, fordi Undersögelserne paa anförte Sted lægge denne Forudsætning til Grund.

§. 32.

Er Spörgsmaalet derimod om identiske eller ligedanne Cycloïdalers Genitricer, saa maa Undersögelsen anstilles overeensstemmende med §. 24. Sættes sammested Evolventens Radius Osculi $NR = R$, $NM = AM = y$ (Fig. 18) MF eller MS (Fig. 18) $= q$, og $CM = r$; sættes endelig $AN = Y$, $AK = p$ og $AL = P$, saa er

$$AK : AM = AM : MS$$

eller $p : y = y : q$

det er $q = \frac{y^2}{p}$.

Nu er MR (§. 24) $= NR - NM = R - y$, altsaa, bliver

$$NR : MR = 2MF : CM$$

til $R : R - y = \frac{2y^2}{p} : \left(r = \frac{ydy}{dp}\right)$

eller $R : y = \frac{2y^2}{p} : \frac{2y^2}{p} - \frac{ydy}{dp}$

$$= 2ydp : 2ydp - pdy$$

eller $R = \frac{2y^2dp}{2ydp - pdy}$

en Formel som ogsaa findes uden at kalde §. 24 til Hjelp; thi $R = \frac{YdY}{dP}$. Men $Y = AN = 2AK = 2p$, altsaa $YdY =$

$4pdp$, og $P = \frac{2p^2y}{y}$ fordi AM : AK = AN : AL; fölgelig $dP = \frac{4pydp - 2p^2dy}{y^2}$. Substitueres disse Værdier, saa erholder man

$$R = \frac{YdY}{dP} = \frac{4py^2dp}{4pydp - 2p^2dy} = \frac{2y^2dp}{2ydp - pdy},$$ naar Tæller og Nævner divideres med $2p$.

§. 33.

Ved Hjelp af den nylig fundne Formel lade sig adskillige Poroblemer let oplöse, hvorpaa jeg vil give fölgende Exempler:

Exempel 1.

Man skal finde den krumme Linie, hvis Cycloïdale er en ret Linie?

Oplösning.

Her er $R = \infty$, altsaa $2ydp - pdy = 0$, fölgelig ogsaa

$$\frac{2ypdp - p^2dy}{y^2} = 0$$

et Udtryk, hvis Integral er $\frac{p^2}{y} = a$. Den krumme Linie er altsaa en Parabole. Vid. §. 21.

Exempel 2.

Man skal finde den krumme Linie, hvis Cycloïdale er en Cirkel?

Oplösning.

Her er R altsaa en uforanderlig Störrelse $= a$; fölgelig:

$$2y^2dp = 2aydp - apdy$$

eller $apdy = 2(ay - y^2)\,dp$

som giver $\frac{2dp}{p} = \frac{ady}{ay - y^2} = \frac{Ady}{a-y} + \frac{Bdy}{y}$

hvor man finder $A = 1$, og $B = 1$, og altsaa, ved at integrere,

$$\frac{p^2}{b^2} = \frac{y}{a-y} \text{ eller } p = b\sqrt{\frac{y}{a-y}} = \frac{by}{\sqrt{ay - y^2}}$$

Men $p = \frac{y^2 d\phi}{\sqrt{dy^2 + y^2 d\phi^2}}$ naar ϕ forestiller *Abscissevinlen*; altsaa

$$\frac{y^2 d\phi^2}{dy^2 + y^2 d\phi^2} = \frac{b^2}{ay - y^2}$$

altsaa $1 + \frac{dy^2}{y^2 d\phi^2} = \frac{ay - y^2}{b^2}$

og $\frac{dy}{yd\phi} = \frac{\sqrt{(ay - y^2 - b^2)}}{b}$

som giver $d\phi = \frac{bdy}{y\sqrt{ay - y^2 - b^2}}$

Sætter man $y \div \frac{1}{2}a = z$, saa er $y = z + \frac{1}{2}a$, og altsaa

$$ay = az + \tfrac{1}{2}a^2$$
$$-y^2 = -az - \tfrac{1}{4}a^2 - z^2$$
$$-b^2 = \qquad\quad -b^2$$

eller $ay - y^2 - b^2 - \frac{1}{4}a^2 - z^2 = c^2 - z^2$, naar $c^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$.

Man har altsaa $d\phi = \frac{bdz}{(z + \frac{1}{2}a)\sqrt{b^2 - z^2}}$.

Fremdeles sætte man $\sqrt{c^2 - z^2} = c - tz$, eller

$$z^2 = 2ctz - t^2z^2$$

saa er $z = 2ct - t^2z$

eller $z = \frac{2ct}{1+t^2}$

og $c - tz = c - \frac{2ct^2}{1+t^2}$

altsaa $\sqrt{c^2 - z^2} = c \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}$

fremdeles er $dz = 2c \cdot \frac{(1+t^2)dt - 2t^2dt}{(1+t^2)^2}$

eller $dz = 2c \cdot \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cdot dt$

endelig er $z + \frac{1}{2}a = \frac{\frac{1}{2}a + 2ct + \frac{1}{2}at^2}{1+t^2}$

altsaa $\frac{d\phi}{b} = \frac{2c(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2} : \frac{(\frac{1}{2}a + 2ct + \frac{1}{2}at_2) \cdot (1-t^2)c}{(1+t^2)^2}$

$$= \frac{2dt}{\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{4c}{a}t + t^2\right)}$$

eller $\phi = \frac{4b}{a} \int \frac{dt}{1 + \frac{4c}{a}t + t^2}$

Sætter man endelig $t + \frac{2c}{a} = u$, saa er $dt = du$,

og $t^2 + \frac{4ct}{a} + \frac{4c^2}{a^2} = u^2$

altsaa $1 + \frac{4ct}{a} + t^2 = u^2 + 1 - \frac{4c^2}{a^2} = u^2 + f^2$, naar $f^2 =$

$$= 1 - \frac{4c^2}{a^2},$$

eller $= u^2 - g^2$, naar $\frac{4c^2}{a^2} - 1 = g^2$.

Men $4c^2 = a^2 - 4b^2$, altsaa $\frac{4c^2}{a^2} = 1 - \frac{4b^2}{a^2}$, hvorafsluttes

$f^2 = \frac{4b^2}{a^2}$, det er $f = \pm \frac{2b}{a}$

og $\quad g^2 = -\frac{4b_2}{a^2}$, det er $g = \pm\frac{2b}{a}\sqrt{-1}$

I begge Tilfælde har man

$$1 + \frac{4ct}{a} + t^2 = u^2 + \frac{4b_2}{a^2}$$

altsaa $\quad \phi = \frac{4b}{a}\int\frac{du}{\frac{4b^2}{a^2}+u^2} = \frac{4b}{a} \cdot \int\frac{\frac{a^2}{4b^2}\cdot du}{1+\frac{a^2u^2}{4b^2}} =$

$$= . \text{Arc. tang. } \frac{au}{2b}.$$

Men $au = at + 2c = at + \sqrt{a^2 - 4b^2}$

og $t = \frac{c - \sqrt{c^2 - z^2}}{z} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2 - z_2}}{z}$

Da nu $z = y - \frac{1}{2}a$, saa er

$$t = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} - \sqrt{ay - y^2 - b^2}}{y - \frac{1}{2}a}$$

altsaa $at + \sqrt{a^2 - 4b^2}$

$$= \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - 4b} - a\sqrt{ay - y^2 - b^2} + (y - \frac{1}{2}a)\sqrt{a^2 - 4b^2}}{y - \frac{1}{2}a}$$

det er: $au = \frac{y\sqrt{a^2 - 4b^2} - a\sqrt{ay - y^2 - b^2}}{y - \frac{1}{2}a}$

Heraf erholdes endelig

$$\phi = \text{Arc. tang. } \frac{y\sqrt{a^2 - 4b^2} - a\sqrt{ay - y^2 - b^2}}{b(2y - a)} + \text{Const.}$$

Da altsaa tang. ϕ kan bestemmes algebraisk ved en Function af 2den Grad af den foranderlige Störrelse y, saa er den sögte Curve selv en conisk Section, som desuden let kunde sluttes af §. 15. No. 2, skjöndt ikke i den Grad af Almindelighed. Consructionen og andet herhen hörende, forbigaaer jeg for at undersöge det almindeligere Spörgsmaal:

Hvilken er den Curve, hvis Cycloïdale er identisk eller ligedannet med sin Genitrix?

§. 34.

Da p aldrig er större end y, og P aldrig större end Y, saa kan man i Almindelighed antage

$$a^m y^n = b^n p^m$$

og $$A^m Y^n = B^n P^m$$

hvoraffölger $y = \frac{b}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot p^{\frac{m}{n}}$

og $$Y = \frac{B}{A^{\frac{m}{n}}} \cdot P^{\frac{m}{n}}$$

fremdeles $dy = \frac{mb}{na^{\frac{m}{n}}} p^{\frac{m-n}{n}} dp$

og $$dY = \frac{mB}{nA^{\frac{m}{n}}} \cdot P^{\frac{m-n}{n}} dP$$

fölgelig bliver $R = \frac{YdY}{dP} = \frac{mB_2}{nA^{\frac{2m}{n}}} \cdot P^{\frac{2m-n}{n}}$

Men R er ogsaa $= \frac{2y^2 dp}{2ydp - pdy}$

$$= \frac{2b^2}{a^{\frac{2m}{n}}} \cdot p^{\frac{2m}{n}} : \left(\frac{2b}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot p^{\frac{m}{n}} - \frac{mb}{na^{\frac{m}{n}}} p^{\frac{m}{n}} \right)$$

$$= \frac{2\,n\,b_2\,p^{\frac{m}{n}}}{(2\,n\,b - m\,b)\,a^{\frac{m}{n}}} = \frac{2\,n\,b\,p^{\frac{m}{n}}}{(2\,n - m)\,a^{\frac{m}{n}}}$$

og $\quad Y = 2\,p$ eller $p = \frac{1}{2}Y$, altsaa

$$R = \frac{2\,n \cdot 2^{\frac{-m}{n}}\,b \cdot Y^{\frac{m}{n}}}{(2\,n - m)\,a^{\frac{m}{n}}}.$$

som er Udtrykket for den til Cycloïdalen henhörende Krummingsradius. For Basis eller Genitricen findes derimod

$$r = \frac{m\,b^2}{n\,a^{\frac{2m}{n}}} \cdot p^{\frac{2\,m - n}{n}} = \frac{y\,d\,y}{d\,p}$$

og da $\quad p = \frac{a}{b^{\frac{n}{m}}} \cdot y^{\frac{n}{m}}$, saa bliver

$$r = \frac{m\,b^2}{n\,a^{\frac{2m}{n}}} \cdot \frac{a^{\frac{2m-n}{n}}}{b^{\frac{2m-n}{n}}} \cdot y^{\frac{2m-n}{n}}$$

eller $\quad r = \frac{m\,b^{\frac{n}{m}}}{n\,a} \cdot y^{\frac{2m-n}{m}}$

Skulle nu disse tvende Curver være ligedannede, saa maa for det förste $\frac{m}{n}$ være $= \frac{2\,m - n}{m}$, eller $m^2 = 2\,m\,n - n^2$, det er $m^2 - 2\,m\,n + n^2 = 0$, $m - n = 0$, eller $m = n$

Men denne samme Liighed, $m = n$, gjör ogsaa Curverne, Genitrix og Cycloïdalen identiske; thi man faaer:

$$R = \frac{b}{a} \cdot Y$$

og $\quad r = \frac{b}{a} \cdot y$

R er altsaa fuldkommen den samme Function af Y, som r er af y; og Genitrix selv udtrykkes ved Ligningen:

$$a y = b p$$

og er altsaa en logarithmisk Spirale, den eneste der findes paa denne Vej. Vælger man istædet for $a^m y^n = b^n p^m$, en anden almindelig Ligning, f. Ex.

$$y^m = a^\alpha p^{m-\alpha} + b^\beta p^{m-\beta} + c^\gamma p^{m-\gamma} \text{ etc.}$$

og behandler den paa en lignende Maade, vil man maaskee finde ikke allene flere Genitricer der have den anförte Egenskab, men endog derved faae Lejlighed til at udvide Analysen. Nærværende Æmne er altsaa for dem, der have Ævne, Lyst og Tid dertil, stedse et undersögelseværdigt Æmne. Men da jeg har flere ikke uvigtige Anvendelser at gjöre af min Læresætning, overlader jeg Fuldstændiggjörelsen af det hidtil foredragne til skarpsindigere Hoveder, tilfreds med paa ny at have fört dem ud paa en Mark, hvor der endnu maae være ypperlige og skjönne Blomster at plukke. Det gaaer ellers her, som i andre mathematiske Undersögelser. I Forbigaaende finder man Ting som man ellers ikke let skulde finde. Derhen hörer f. Ex. den almindelige Egenskab hos de coniske Sectioner, som Calculen §. 33. Ex. 2. förer os hen til, og som maa gjelde for Brændpunktet, ifölge §. 25. No. 2., nemlig, at

$$\sqrt{a y - y^2} : b = y : p$$

Antager man nu, for Ellipsen, at a er = den store Axe, saa er Fig. 13.

$$\sqrt{FM \cdot GM} : b = FM : Ff$$

Sætter man a negativ, saa maae b antages imaginair for at vedligeholde Realiteten i Forholdet y : p, altsaa bliver for Hyperbolen

$$\sqrt{-ay-y^2} : b\sqrt{-1} = y : p$$

eller $$\sqrt{ay+y^2} : b = y : p$$

Tager man her igjen a for den store Axe, saa bliver Fig. 14.

$$\sqrt{:FM . GM} : b = FM : Ff$$

Da nu b er reel ved Ellipsen og imaginair ved Hyperbolen, saa er det klart at b forestiller i begge Tilfælde den mindre Axe. For at overbevise mig herom, raisonerer jeg saaledes Fig. 13 og 14.

$$FM : GM = Ff : Gg$$

altsaa $$\sqrt{FM . GM} : FM = \sqrt{Ff . Gg} : Ff$$

eller $$\sqrt{FM . GM} : \sqrt{Ff . Gg} = FM : Ff$$

det er $$\sqrt{FM . GM} : CD = FM : Ff$$

Slutningen i Enden af §. 33. er altsaa rigtig; a er den store Axe og tillige Cirkelens Radius; begge Dele stemme aldeles overens med §. 25. No. 2. Dette maae være nok herom.

Om Cycloïdalerne af höjere Ordener.

§. 35.

Den höjere Geometrie standser ingenlunde ved Evoluternes Bestemmelse; den veed at finde Evoluternes Evoluter. Det har *Euler* viist i sin Investigatio curvarum, quæ evolutæ sui similes producunt; Comment. Ac. Imp. Petrop. Tom. XII.

Ogsaa det §. 11. fremsatte Theorem tillader en saadan Udvidelse, hvoraf jeg her vil give mig den Ære at forelægge det K. V. S. en Pröve, efter at jeg har forudskikket fölgende

Definitioner. Cycloïdaler af förste Orden kalder jeg dem, som fremkomme ved den förste Udvikling af en given Curve. *Cycloïdaler af anden Orden* ere de, hvis Genitricer ere Cycloïdaler af förste Orden, og naar en Cycloïdale af $n^{\underline{te}}$ Orden udvikles, kalder jeg den derved fremkommende Curve *en Cycloïdale af* $(n+1)^{\underline{te}}$ *Orden.*

En saaledes fortsat Evolution forestilles Fig. 20. aa og $\alpha\alpha$ ere Genitricerne; $\beta\beta$, Cycloïdalen af förste Orden, er Basis, og i den omvendte Beliggenhed bb er den Genitrix til Evolventen $\gamma\gamma$, en Cycloïdale af anden Orden, som ved en lignende Evolution frembringer en Cycloïdale af tredie Orden, o. s. v. A er den fælles Pol for alle Cycloïdalers Ordinater AM, AN, AO, o. s. v. Rr, Ss, Tt og s. v., ere Brændlinierne; CM, RN, SO o. s. v. Krummingsradierne til Cycloidalerne i M, NO, o. s. v.; endelig ere AK, AL o. s. v.; endelig ere AK, AL o. s. v. Perpendikler paa Tangenterne TM, VN, o. s. v.

Dette forudsat, betegner jeg AM, AN, AO, . . . ved $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$

AK, AL, . . . ved $p, p', p'', \ldots p^{(n)}$

og CM, RN, SO, . . ved $r, r', r'', \ldots r^{(n)}$

saa er $y' = 2p$, $y'' = 2p'$, $y''' = 2p''$, ... og $y^{(n)} = 2p^{(n-1)}$

§. 36.

Da MN og AL ere lodrette paa Tangenten VN, altsaa indbyrdes parallele, saa er V. MAN = V. MNA = V. NAL, altsaa

$$AM : AK = AN : AL$$

det er $y : p = 2p : p'$

altsaa $p' = \frac{2p^2}{y}$ eller $p' = \frac{(y')^2}{2y}$

Paa samme Maade findes:

$$p'' = \frac{2(p')^2}{y'} \text{ eller } p'' = \frac{(y'')^2}{2y'}$$

$$p''' = \frac{2(p'')^2}{y''} \text{ eller } p''' = \frac{(y''')^2}{2y''}$$

og i Almindelighed: $p^{(n)} = \frac{2\left(p^{(n-1)}\right)^2}{y^{(n-1)}}$ eller $p^{(n)} = \frac{\left(y^{(n)}\right)^2}{2y^{(n-1)}}$

§. 37.

Sammenligner man de i forrige §. fundne Udtryk, saa finder man:

$$y = y$$

$$y' = 2p$$

$$y'' = 2p' = \frac{2^2 \cdot p^2}{y}$$

$$y''' = 2p'' = \frac{(y'')^2}{y'} = \frac{2^3 \cdot p^3}{y^2}$$

$y^{IV} = 2p''' = \frac{(y''')^2}{y''} = \frac{2^4 \cdot p^4}{y^3}$, og i Almindelighed:

$$y^{(n)} = 2p^{(n-1)} = \frac{\left(y^{(n-1)}\right)^2}{y^{(n-2)}} = \frac{2^n \cdot p^n}{y^{n-1}}.$$

§. 38.

Paa samme Maade finder man Reductionen for Perpendiklerne af höjere Ordener, udtrykte ved Functionen af de til Genitricen hörende Perpendikler og Ordinater, nemlig:

$$p = p$$

$$p' = \frac{2p^2}{y}$$

$$p'' = \frac{(y'')^2}{2y'} = \frac{2^2 \cdot p^3}{y^2}$$

$$p''' = \frac{(y''')^2}{2y''} = \frac{2_3 \cdot p^4}{y^3},$$ og i Almindelighed:

$$p^{(n)} = \frac{y^{(n+1)}}{2} = \frac{2^n \cdot p^{n+1}}{y^n}.$$

§. 39.

Man drage AH lodret paa AM, saa er

$$AK : AM = AM : HM$$

eller $p : y = y : q$

altsaa $q = y^2 : p$.

Paa en lignende Maade findes:

$$q' = \frac{(y')^2}{p'} = 2y$$

$$q'' = \frac{y''}{p''} = 4p = 2^2 \cdot p$$

$$q''' = \frac{(y''')^2}{p'''} = \frac{2^3 \cdot p^2}{y}$$

$$q'''' = \frac{(y'''')^2}{p''''} = \frac{2_4 \cdot p^3}{y^2},$$ og i Almindelighed:

$$q^n = \frac{\left(y^{(n)}\right)^2}{p^{(n)}} = \frac{2^n \cdot p^{n-1}}{y^{n-2}}$$

Anm. Betragter man Vinklerne i Fig. 20., saa seer man let, at MAN = NAO o. s. v. Fremdeles seer man af de foregaaende Bestemmelser, at Rækkerne:

$$y,\ y',\ y'',\ y''',\ y'''',\ \ldots\ldots\ y^{(n)}$$

$$p,\ p',\ p'',\ p''',\ p'''',\ \ldots\ldots\ p^{(n)}$$

$$\text{og}\quad q,\ q',\ q'',\ q''',\ q'''',\ \ldots\ldots\ q^{(n)}$$

ere geometriske Rækker, hvis fælles Forholds-Exponent er $\frac{2\,p}{y}$. Igjennem Punkterne M, N, O, etc. K, L, etc., H, H′, H″, etc. gaae altsaa 3 logarithmiske Spiraler, som egentlig ere een af samme Spirale i 3 forskjellige Beliggenheder. Nu veed man af det Foregaaende, at denne Spirale er sin egen Cycloïdale. Altsaa ere ikke allene alle dens höjere Cycloïdaler identiske Spiraler, men endog Endepunkterne af corresponderende Ordinater eller Perpendikler, eller de ved Perpendiklerne paa Ordinaterne bestemte og i Krummingsradierne liggende Punkter H, H′H″ o. s. v. ligge i ligesaadanne Spiraler, som Beliggenheden undtagen, ere een og samme krumme Linie. Maaskee har Hr. Hofr. Kæstner ogsaa tænkt herpaa, naar han pag. 545. af det i Anm. til §. 31. anförte Skrift siger: *Weil diese Linie auf sehr viel andere Arten, durch welche sonst aus einer krummen Linie andere entstehen, immer sich selbst wieder darstellet, u. s. w.*" Jac. Bernoullis Emblematisering er altsaa ingenlunde upassende.

§. 40.

Af §. 19 sammenlignet med Fig. 20. veed man, at

$$NR : MR = 2\,MH : CM$$

$$\text{eller}\quad r' : r' - y = \frac{2\,y^2}{p} : r$$

$$\text{altsaa}\quad r' : y = \frac{2\,y^2}{p} : \frac{2\,y^2}{p} - r$$

følgelig $r' = \frac{2y^3}{2y^2 - pr}$

ligeledes bliver $r'' = \frac{2'(y')_3}{2(y')^2 - p'r'}$

$$r''' = \frac{2(y'')^3}{2(y'')^2 - p''r''}$$

og i Almindelighed:

$$r^{(n)} = \frac{2\left(y^{(n-1)}\right)^3}{2\left(y^{(n-1)}\right)^2 - p^{(n-1)}\,r^{(n-1)}}$$

§. 41.

I disse sidste Udtryk substituere man de i de foregaaende §§. fundne, saa finder man ved en let Calcul:

$$r' = \frac{2y^3}{2y^2 - pr}$$

$$r'' = 2^2 \cdot p \cdot \frac{2y^2 - pr}{3y^2 - 2pr}$$

$$r''' = \frac{2^3 \cdot p2}{y} \cdot \frac{3y_2 - 2pr}{4y^2 - 3pr}$$

$r'''' = \frac{2^4 \cdot p^3}{y_2} \cdot \frac{4y^2 - 3pr}{5y^2 - 4pr}$, og i Almindelighed:

$$r^{(n)} = \frac{2^n p^{n-1}}{y^{n-2}} \cdot \frac{ny^2 - (n-1)pr}{(n+1)y^2 - npr}.$$

Er nemlig denne almindelige Formel rigtig for $r^{(n)}$, saa gjelder den ogsaa for $r^{(n+1)}$; thi efter §. 40. er

$$r^{(n+1)} = \frac{2\left(y^{(n)}\right)^3}{2\left(y^{(n)}\right)^2 - p^{(n)}\,r^{(n)}}$$

Men $\quad 2(y^{(n)})^3 = \dfrac{2^{3n+1} \cdot p^{3n}}{y^{3n-3}}$.

og $\quad 2(y^{(n)})^2 = \dfrac{2^{2n+1} \cdot p^{2n}}{y^{2n-2}}$, ifölge §. 37.

Fremdeles er $p^{(n)} r^{(n)} = \dfrac{2^n \cdot p^{n+1}}{y^n} \cdot \dfrac{2^n \cdot p^{n-1}}{y^{n-2}} \cdot \dfrac{ny^2 - (n-1)pr}{(n+1)y^2 - npr}$

$$= \frac{2^{2n} \cdot p^{2n}}{y^{2n-2}} \cdot \frac{ny^2 - (n-1)pr}{(n+1)y^2 - npr}. \text{ (§. 38 og 41.)}$$

Altsaa bliver Nævneren i Formelen for $r^{(n+1)}$,

$$= \frac{2^{2n} \cdot p^{2n}}{y^{2n-2}} \cdot \left(2 - \frac{ny^2 - (n-1)pr}{(n+1)y^2 - npr}\right)$$

$$= \frac{2^{2n} \cdot p^{2n}}{y^{2n-2}} \cdot \frac{(n+2)y^2 - (n+1)pr}{(n+1.)y^2 - npr}$$

fölgelig $r^{(n+1)} = \dfrac{2^{n+1} \cdot p^n}{y^{n-1}} \cdot \dfrac{(n+1)y^2 - npr}{(n+2)y^2 - (n+1)pr}$, et Udtryk som ogsaa erholdes, naar man i Stædet for n i Formelen for r^n, sætter $n+1$. Nu gjælder Formelen for $n=1, 2, 3$ og 4; altsaa gjelder den og for $n=5, 6, 7$, o. s. v. Formelen er altsaa almeengyldig, saa ofte som n er et heelt og positivt Tal, og andre Værdier kunne her ikke tænkes.

Anm. Et let Tilfælde falder her strax i Öjnene; nemlig $y^2 = pr$,

som giver $r^{(n)} = \dfrac{2^n \cdot p^{n-1}}{y^{n-2}} = 2\, y^{(n-1)}$ (§. 37.)

eller $\quad r^{(n)} = q^{(n)}$ (§. 39.)

Da nu $r = \dfrac{y^2}{p}$ efter Forudsætningen, altsaa $r=q$, saa sees at ogsaa i Cycloïdalen af n^{te} Orden $r^{(n)} = q^{(n)}$, at Cycloïdalen af

$n^{\underline{te}}$ Orden, det er, enhver af de fölgende Cycloïdaler, er identisk med Genitricen, altsaa en logarithmisk Spirale.

§. 42.

For at gjöre den i foregaaende §. fundne og beviiste almindelige Formel, for den til Cycloïdalen af $n^{\underline{te}}$ Orden henhörende Krummingsradius $r^{(n)}$, ret brugbar og beqvem, er det fornödent at kjende Differentialerne af de i §. 37. og 38. fremsatte analytiske Udtryk. Disse Differentialer ere

I. For $y^{(n)}$

$$d.y = dy$$

$$d.y' = 2dp$$

$$d.y'' = 2^2 . \frac{2ypdp - p^2dy}{y^2}$$

$$d.y''' = 2^3 . \frac{3yp^2dp - 2p^3dy}{y^3}$$

$$d.y'''' = 2^4 . \frac{4yp^3dp - 3p^4dy}{y^4}$$

og i Almindelighed:

$$d.y^{(n)} = 2^n . \frac{nyp^{n-1}dp - (n-1)^n dy}{y^n}$$

II. For $p^{(n)}$.

$$d.p = dp$$

$$d.p' = 2 . \frac{2ypdp - p^2dy}{y^2}$$

$$d.p'' = 2^2 . \frac{3yp^2dp - 2p^3dy}{y^3}$$

$$d.p''' = 2^3 . \frac{4yp^3dp - 3p_4dy}{y^4}$$

$$d.p'''' = 2^4 . \frac{5yp^4dp - 4p^5dy}{y^5}$$

og i Almindelighed:

$$d.p^n = 2^n . \frac{(n+1)yp^ndp - np^{n+1}dy}{y^{n+1}}$$

§. 43.

Ere disse Værdier bekjendte, da findes let

$$r^{(n)} = \frac{y^{(n)} . d . y^{(n)}}{d . p^{(n)}} = \frac{2^n . p^n}{y^{n-1}} . \frac{2^n . (nyp^{n-1} dp - (n-1)p^n dy) : y^n}{2^n . ((n+1)yp^n dp - np^{n+1} dy) : y^{n+1}}$$

eller $r^{(n)} = \frac{2^n . p^{n-1}}{y^{n-2}} . \frac{nydp - (n-1)pdy}{(n+1)ydp - npdy}$

et andet Udtryk for $r^{(n)}$, som dog ogsaa udledes af §. 41. naar man sætter $r = \frac{ydy}{dp}$.

§. 44.

Af samtlige hidtil (§. 36—43) fundne analytiske Udtryk for de fornemste ved Evolutionen forekommende Linier kan man efter Omstændigheder snart vælge eet snart et andet, naar man af den givne Genitrix vil bestemme Cycloïdalen af en vis Orden, eller omvendt af Cycloïdalen finde *Genitricen*, f. Ex. *af* n^{te} *Orden*, det er, den Genitrix, hvortil den givne Curve er en Cycloïdale af n^{te} Orden. Imidlertid er at mærke, at da Udtrykket for $r^{(n)}$ indeholder Differentialier, og altsaa gjör Integrationen af Differential-Ligninger nödvendig, som dog ikke altid er i vores Magt, (i det mindste ikke saasnart der forlanges endelige Udtryk) saa gjör man bedst i at betjene sig af Ligningerne imellem Ordinaterne og Perpp. paa Tangg., nemlig af

α) den imellem p og y for Genitricen

og *β*) den imellem $p^{(n)}$ og $y^{(n)}$ for Cycloïdalen, saa erholder man stedse endelige Udtryk, hvis videre Udvikling er Algeberens og Integralregningens Forretning, naar man nemlig istædet for en Ligning imellem p g y eller $p^{(n)}$ og $y^{(n)}$, fordrer en anden imellem ϕ og y eller $\phi^{(n)}$ og $y^{(n)}$ naar nemlig $\phi^{(n)}$ betegner den til Cycloïdalen af $n^{\underline{te}}$ Orden hörende Abscissevinkel. Jeg vil for Anvendelsens Skyld tilföje et par Opgaver.

Förste Opgave.

Man skal bestemme hvilken Function Radius Osculi er af Ordinaten i en Cycloïdale af $n^{\underline{te}}$ Orden, hvis Genitrix bestemmes ved Ligningen $p = a \log . \text{nat} . \frac{y}{a}$?

Oplösning.

Ved at differentiere erholder man

$$dp = \frac{ady}{y}.$$

eller $\qquad ydp = ady$

Substitueres dette Udtryk i den almindelige Formel §. 43, saa erholder man

$$r^{(n)} = \frac{2^n . p^{n-1}}{y^{n-2}} . \frac{na - (n-1)p}{(n+1)a - np}$$

Men af §. 37 faaer man $p = \frac{1}{2} . \sqrt[n]{y^{(n)} . y^{n-1}} = \frac{y}{2} . \sqrt[n]{\frac{y^{(n)}}{y}}$

altsaa $\quad r^{(n)} = \dfrac{2^n . y^{n-1} . \sqrt[n]{\dfrac{\left(y^{(n)}\right)^{n-1}}{y^{n-1}}}}{y^{n-2}} . \dfrac{na - (n-1)\frac{y}{2} . \sqrt[n]{\frac{y^{(n)}}{y}}}{(n+1)a - \frac{ny}{2} . \sqrt[n]{\frac{y^{(n)}}{y}}}$

$$= 2^n \cdot \sqrt[n]{y(y^{(n)})^{n-1}} \cdot \frac{2na-(n-1)y\sqrt[n]{\frac{y^{(n)}}{y}}}{2(n+1)a-ny\sqrt[n]{\frac{y^{(n)}}{y}}}$$

$$= 2^n \cdot \frac{2na\sqrt[n]{y\left(y^{(n)}\right)^{n-1}} - (n-1)\,y\,.\,y^{(n)}}{2(n+1)a\sqrt[n]{y\left(y^{(n)}\right)^{n-1}} - n\,y\,.\,y^{(n)}} \cdot \sqrt[n]{y(y^{(n)})^{n-1}}$$

Men for at kunne eliminere y, maatte man kunne oplöse Ligningen:

$$y^{(n)} = \frac{2^n \,.\, a^n \left(\log.\frac{y}{a}\right)^n}{y^{(n-1)}}$$

for deraf at udlede y udtrykt ved $y^{(n)}$. Men da man endnu ingen almindelig Methode har til at oplöse algebraïske Ligninger af 5te, 6te og höjere Grader, er der endnu mindre at haabe i Henseende til de transcendente Ligningers almindelige Oplösning. Imidlertid kan man allerede af dette Problem see hvad Gang Oplösningen vil tage ved andre Problemer af samme Art. Man erholder nemlig Udtryk for $r^{(n)}$, hvori den, foruden $y^{(n)}$ eller $p^{(n)}$, forekommer y eller p. Fremdeles erholder man en Ligning imellem $y^{(n)}$ og y eller p. Af samme eliminerer man, naar det kan skee, y eller p, saa erholder man en Ligning, hvori der blot forekommer $y^{(n)}$.

Anden Opgave.

Man skal bestemme den Genitrice, hvis Cycloïdale af n^{te} Orden udtrykkes ved Ligningen $r^{(n)} = y^{(n)} : \log.\frac{y^{(n)}}{a}$?

Oplösning.

Da $r^{(n)}$ ogsaa er $= \frac{y^{(n)} \cdot d \cdot y^{(n)}}{d \cdot p^{(n)}}$, saa bliver

$$\log . \frac{y^{(n)}}{a} . d . y^{(n)} = d . p^{(n)};$$

sætter man derfor $y^{(n)} = au$, og $p^{(n)} = as$

saa er $\log. u . du = ds$, en Differential-Ligning, hvis Integral er:

$$s = u\log . u - u + \text{Const.}$$

eller $as = au\log . u - au + \text{Const.}$

det er $p^{(n)} = y^{(n)} . \log . \frac{y^{(n)}}{a} - y^{(n)} + \text{Const.}$

Lad os antage, at a er den Værdie, som $p^{(n)}$ og $y^{(n)}$ faae, naar de falde sammen, saa er Const. $= 2a$, altsaa

$$p^{(n)} = 2a + y^{(n)} . \log . \frac{y^{(n)}}{ae}$$

naar e betyder det naturlige Logarithme-Systems Basis.

Men $p^{(n)} = \frac{2^n . p^{n+1}}{y^n}$, §. 38.

og $y^{(n)} = \frac{2^n . p^n}{y^{n-1}}$, §. 37.

altsaa bliver den sögte Ligning:

$$\frac{2^n . p^{n+1}}{y^n} = 2a + \frac{2^n . p^n}{y^{n-1}} . \log . \frac{2^n . p^n}{aey^{n-1}}$$

som i det specielle Tilfælde, $n = 1$, bliver til

$$\frac{2p^2}{y} = 2a + 2p \log . \frac{2p}{ae}$$

eller $y = \frac{p^2}{a + p \log . \frac{2p}{ae}}$.

Anm. Man begriber let, at dette ikke bör skrives paa den her foredragne Methodes, men paa Algeberens og Integral-Calculens Regning, naar de evolutoriske Problemers Oplösninger ikke altid med lige Held kunne udföres. Man seer deraf tillige, at theoretiske Speculationer, foruden den Övelse Forstanden derved faaer, ogsaa have den Nytte, at man derved tlige bliver de Aabninger vaer i andre af Theoriens Dele, som endnu bör udfyldes; at de altsaa tjene til at gjöre Theorien fuldstændigere. Mange af den höjere Mechaniks Undersögelser ere af denne Beskaffenhed.

Om Cycloïdalernes Rectification.

§. 45.

Efterat have betragtet de vigtigste Tilfælde og Slutninger, som kunne udledes af det §. 11. fremsatte almindelige Theorem, tillade man mig endnu i Korthed at gjennemgaae en herhen hörende Materie, nemlig de ved Evolutionen fremkomne Evolventers og Cycloïdalers Retification. Forfatterens Hensigt med dette lille Tillæg er, at give et nyt Beviis for den Erfarings-Sandhed, som ikke let kan undgaae nogen Tænker, nemlig, at *mange Sandheder blive saa at sige beskuelige paa een Vej, som ikke uden forviklede Kjædeslutninger findes og indsees paa en anden Vej*. Det fölgende vil nærmere oplyse dette.

§. 46.

Af §. 11. have vi seet, at:

$$NR : MR = CD . mF : CM . DM . \text{(Fig. 3.)}$$

eller $nR : mR = CD \cdot mF : CM \cdot DM$

men $nR : mR = Nn : mo$

altsaa $Nn : mo = CD \cdot mF : CM \cdot DM$

nu er $mo : Mm = qr : qm$ §. 11. V.

og $qr : qm = mn : mF$

fölgelig $Nn : Mm = CD \cdot mn : CM \cdot DM$

$$= CD \cdot MN : CM \cdot DM$$

hvoraf fölger $Nn = \frac{CD \cdot MN}{CM \cdot DM} \cdot Mm$.

eller $Nn = \frac{CD \cdot MN}{CM \cdot DM} \cdot qm$

det er: $d \cdot EN = \frac{CD \cdot MN}{CM \cdot DM} \cdot d \cdot AM$

eller: $d \cdot EN = \frac{CD \cdot MN}{CM \cdot DM} \cdot d \cdot BM$ ∴

Heraf udledes disse Fölgesætninger:

1) *Er Basis en ret Linie*, saa bliver $CM = DM = \infty$, og

$$d \cdot EN = \frac{MN}{DM} \cdot d \cdot BM$$

2) *Er Basis en ret Linie og Genitrix en Cirkel*, som Fig. 21, saa er:

$$d \cdot AN = \frac{MN}{DM} \cdot d \cdot NPM$$

Deles nu V. NDM i to Dele ved DP som skjærer NM i O, saa har man

$$\tfrac{1}{4} \cdot d \cdot AN = \frac{MO}{DM} \cdot d \cdot PM$$

Man sætte V. MDP = PDN = ϕ, saa er $\frac{MO}{DM} = \sin . \phi$, og $PM = r\phi$

altsaa $\frac{1}{4} \cdot d \cdot AN = r \sin \phi \cdot d\, \phi$

som integreret, giver

$$\tfrac{1}{4}\ AN = Const. - r\cos.\phi$$

hvor den bestandige Störrelse bestemmes deraf, at $AN=0$ naar ϕ eller $2r\phi = 0$; altsaa er

$$\tfrac{1}{4}\ AN = r\ (1 - \cos.\phi)$$

det er $AN = 4QM$, naar PQ drages parallel med AMZ.

Længden af den halve Cycloïde bliver altsaa $= 4DM$, fordi MPN bliver liig en Halv-Cirkel, altsaa PM en Qvadrant, og Q falder i D. Deraf fölger da, at

Længden af den hele Cycloïde er det firedobbelte af den genererende Cirkels Diameter.

Anm. Da $1 - \cos\phi = 2\sin^2.\tfrac{1}{2}\phi$, saa er ogsaa $AN = 8r.\sin^2.\tfrac{1}{2}\phi$. Man sætte $180° - 2\phi = \psi$, saa er $\tfrac{1}{2}\phi = 45° - \tfrac{1}{4}\psi$, $\phi = 90° - \tfrac{1}{2}\psi$ og $\cos.\phi = \sin.\tfrac{1}{2}\psi$ fölgelig $AN = 4r\ (1 - \sin.\tfrac{1}{2}\psi)$. Er nu H det höjeste Punkt i Cycloïden, saa er $AH = 4r$, altsaa $NH = 4r\sin\tfrac{1}{2}\psi = 2r.2\sin\tfrac{1}{2}\psi$. Over Diametren HI beskrive man en Halv-Cirkel HTI og drage NS parallel med AZ, saa bliver ψ Vinklen, der svarer til Buen HT og Chorden $HT = r.2\sin.\tfrac{1}{2}\psi$, altsaa $NH = 2$ Chord. HT. Dette stemmer fuldkommen overeens med det som Wolf viser i sine Elem. Math. univ. Tom. I. Analys. inf. pag. 605. probl. 58. §. 168. Ligesom man i Henseende til Ligningen $AN = 4QM$ kan eftersee Newtoni Princ. Phil. Nat. Lib. I. Prop. 49. Theor. 17. not. 462. Corollarium 7.

3) Er Genitrix en ret Linie, saa bliver $DM = DC = \infty$, altsaa

$$d.EN = \frac{MN}{CM}.d.AM \text{ (Fig. 6).}$$

eller $$d.EN = \frac{AM.d.AM}{CM}$$

4) Er Genitrix en ret Linie og Basis en Cirkel, saa bliver CM bestandig

og $$AN = \frac{AM^2}{AB} = \frac{MN^2}{AB}$$

Cirkelens sædvanlige Evolvente har altsaa den smukke Egenskab, at dens Buer forholde sig som Quadraterne af de dertil paa Evoluten (Cirkelen) svarende Buer, eller som de til Buernes Endepunkter N svarende Krummingsradiers Qvadrater.

5) Er Genitrix en ret Linie og Basis en logarithmisk Spirale, da om man kalder den bestandige Vinkel, under hvilken Ordinaten skjærer Spiralen, α, Ordinaten selv y, Krummingsradius r, Længden AM eller den afviklede Bue s, saa er

$$s = y \sec . \alpha = \frac{y}{\cos \mathrm{in}\, \alpha}$$

$$\text{og} \qquad r = \frac{y dy}{dp} = y \operatorname{cosec} . \alpha = \frac{y}{\sin \alpha}$$

$$\text{eller} \qquad s : r = \sin . \alpha : \cos . \alpha = \operatorname{tg} . \alpha : 1$$

$$\text{det er} \qquad s = r \operatorname{tang} . \alpha$$

$$\text{eller} \qquad AM = CM . \operatorname{tg} . \alpha$$

$$\text{altsaa} \qquad d . EN = d . AM . \operatorname{tg} . \alpha$$

$$\text{eller} \qquad EN = AM . \operatorname{tg} . \alpha$$

$$\text{ligesom} \qquad AM = CM . \operatorname{tg} . \alpha$$

Evolventen er altsaa atter en logarithmisk Spirale, fordi MN = AM er Radius Osculi til EN i N, ligesom CM er Radius Osculi til AM i M, og, da begge Buer findes ved at multiplicere Krummingsradierne med tang . α, seer man tillige at Evolventen, Beliggenheden fraregnet, er *identisk med sin Basis.*

6) Er Genitrix en ret Linie og Basis en Cycloïde, saa kan man tænke sig Evolutionens Begyndelse enten i Cycloïdens Toppunkt, H, Fig. 21, eller i A. Erindrer man sig nu

1) at Radius Osculi til Cycloïden, = 2NM = 2IT

2) at Buen NH = 2 Chord. HT

saa bliver CN = 2IT og NH = 2HT

altsaa $d \,.\, HK = \dfrac{NH \,.\, d \,.\, NH}{CN}$ ifölge No. 3.

$$= \frac{4HT \,.\, d \,.\, HT}{2IT}$$

$$= 2 \,.\, \frac{HT \,.\, d \,.\, HT}{\sqrt{HI^2 - HT^2}} = \div\, 2 \,.\, d \,.\, \sqrt{HI^2 - HT^2} = \div\, 2\, d \,.\, IT$$

hvoraf Integralet er $HK = \div\, 2IT + \text{Const.}$ Nu er $KH = 0$ naar $NH = 0$, eller $IT = HI$, altsaa er $HK = 2HI - 2IT$,

og fölgelig $FH = 2HI$

altsaa $KF = 2IT$

Deraf fölger igjen $KF^2 + NK^2 = 4IT^2 + 4HT^2$, fordi $NK = NH = 2HT$.

altsaa $KF^2 + NK^2 = 4HI^2$.

Da nu $ANH = 2HI = 2AE$, saa er $EF = AE = HI$, altsaa og

$$KF^2 + NK^2 = 4EF^2$$

Det er: Summen af Buens Qvadrat og Radii Osculi Qvadrat er en bestandig Störrelse. Da nu dette er en Egenskab ved Cycloïden, hvor den bestandige Störrelse er den genererende Cirkels Diameters 4-dobbelte Qvadrat, saa sees, at den ved Evolutionen beskrevne Curve HKF er en Cycloïde af samme Beskaffenhed som dens Basis.

7) Begynder derimod Evolutionen i A, saa erindre man sig at

$$AN = 4QM$$

og $\quad CN = 2MN = 4MO = 4PQ$

altsaa $\quad d \,.\, AL = \dfrac{AN \,.\, d \,.\, AN}{CN}$

$$= \frac{16 \,.\, QM \,.\, d \,.\, QM}{4PQ}$$

$$= 4 \cdot \frac{QM \cdot d \cdot QM}{PQ}$$

For at integrere dette, sætter jeg $QM = x$, og $DM = a$, saa er

$$d \cdot AL = 4 \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = 4 \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - (a-x)^2}}.$$

Er $a - x = z$, saa bliver $x = a - z$, $dx = -dz$, altsaa

$$\div d \cdot AL = 4 \cdot \frac{(a-z)dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

$$\text{altsaa Const.} \div AL = \left(a \operatorname{Arc.sin.} \frac{z}{a} \sqrt{a^2 - z^2}\right) \cdot 4 = 4(P\triangle + PQ)$$

Denne Constante maa bestemmes deraf, at AL, AN, PQ og QM paa eengang forsvinde. I dette Tilfælde bliver $P\triangle$ til $\triangle M$ det er til $\frac{1}{2}$ $B\triangle M$.

altsaa er Const. $= 4\triangle M$, og fölgelig

$$AL = 4\triangle M - 4(P\triangle + PQ)$$

eller $AL = 4(PM - PQ) = NMS - 4PQ$

Anm. Da Buen AL er liig det 4-dobbelte af Forskjellen imellem en Cirkelbue og dens Sinus, seer man let, at dens geometriske Rectificatiou er given, naar dens Basis, Cycloïden, er given, og at den er liig det 4-dobbelte af en paa den igjennem Cycloïdens Toppunkt gaaende Tangente lodret dragen Ordinate. Jeg opholder mig derfor ikke ved denne Construction, men gaaer til fölgende mærkværdigere Tilfælde:

8) *Naar Genitricen og Basis ere Cirkler*, saa ere Linierne CM, DM og $CD = CM + DM$ uforanderlige. Sæt derfor $\frac{CM \cdot DM}{CM + DM} = N$, saa er, ifölge den almindelige Formel

$$d \cdot EN = \frac{MN \cdot d \cdot BM}{N}$$

eller $EN = \frac{1}{N}\int MN . d . BM$

Er nu det beskrivende Punkt O i Peripherien af Genitrix, Fig. 23, saa bliver MN til MO, og BM til OTM, altsaa, naar $V . ODM = \phi$

$$EO = \frac{1}{N}\int 2 . DM . \mathrm{Sin} . \tfrac{1}{2}\phi . 2 DM . d\phi$$
$$= \frac{4DM^2}{N}\int \sin . \tfrac{1}{2}\phi . d\phi$$
$$= \frac{8DM^2}{N}\int \tfrac{1}{2} d\phi . \sin . \tfrac{1}{2}\phi$$
$$= \frac{8DM . (CM + DM)}{CM} . \left(\mathrm{Const.} - \cos . \tfrac{1}{2}\phi\right)$$

hvor den ved Integrationen tilkommende bestandige Störrelse bestemmes derved at $EO = 0$, naar $\phi = 0$; altsaa erholder man, ved at sætte $DM = \frac{1}{2} d$ og $CM = \frac{1}{2} D$,

$$EO = \frac{4d . (D+d)}{D} . \left(1 - \cos . \tfrac{1}{2}\phi\right)$$
$$= 4 . \frac{D+d}{D} . \sin . \mathrm{vers} . \tfrac{1}{2}\phi . d .$$

Deler man nu ODM i to ligestore Vinkler ODH og HDM, og fælder HI lodret paa DM, saa er $IM = \sin . \mathrm{vers} . \frac{1}{2}\phi . d$; fölgelig

$$EO = \frac{D+d}{d} . 4 IM$$

hvoraf fölger $D+d : d = EO : 4IM$

eller $d : D+d = 4IM : EO$

eller og $EO : 2IM = D+d : \frac{1}{2}d = CD : DM$ for Epicycloïden,

hvoraf og fölger $EO:2IM = D-d:\frac{1}{2}d = CD:DM$ for Hypocycloïden

Fig. 24.

Disse tvende sidste Proportioner udgjöre den 48de og 49de Proportion i den 1ste Bog af Newtons Princ. Phil. Nat. Ved Sammenligningen af begge Deductioner lader der sig neppe tvivle om Fortrinnet i Henseende til Letheden.

9) *Ere de genererende Curver identiske*, saa er CM=DM og MN (Fig. 18) = AM, altsaa

$$d.BN = \frac{2AM.d.BM}{CM}$$

Sætter man AM=y, BM=s, CM=r= $\frac{ydy}{dp}$, saa bliver

$$d.BN = \frac{2yds}{ydy:dp} = \frac{2dpds}{dy}$$

eller da $ds : dy = p : \sqrt{y^2 - p^2}$, erholder man ogsaa

$$d.BN = \frac{2pdp}{\sqrt{y^2 - p^2}}$$

Exempel. Fig. 22.

ANV være Cirkelens sædvanlige Evolvente, hvis Genitrice er den over Cirkel-Peripherien henvæltende rette Linie NM, som er lodret paa Evolventen i N og parallel med CQ, Perpendiklen paa Tangenten. Man drage CM, saa er CM lodret paa MN, altsaa CMNQ et Rectangel, hvori NQ = CM =a er bestandig. Sætter man nu CN = y og CQ = p, saa er $y^2 - p^2 = a^2$, altsaa d.BN eller her

$$d.CO = \frac{2pdp}{a}$$

$$\text{det er: } CLO = \frac{p^2}{a} + \text{Const.}$$

$$= \frac{y^2 - a^2}{a} + \text{Const.}$$

$$= \frac{y^2}{a} - a + \text{Const.}$$

hvor Evolutionen begynder er y=a, og CLO=o, altsaa Const. =o, og fölgelig Buen CLO= $\frac{p^2}{a}$. Det er:

I Cycloïdalen til Cirkelens sædvanlige Evolvente forholde sig Buerne som Qvadraterne af Perpendiklerne paa Tan-

genterne. Forlænger man Tangenten NQ og drager RO til samme, lodret paa ON, saa er

$$NQ : CQ = CQ : QR$$

eller $a : p = p : QR$

altsaa $QR = \frac{p^2}{a}$,

fölgelig QR = Buen CLO.

Altsaa er det Stykke QR af Genitricens Tangente NR som ligger imellem Cycloïdalens Ordinate CO og dens Tangente OR, liig Cycloïdal-Buen CLO.

Anm. Da $CO = 2p$, saa er $p^2 = \frac{CO^2}{4}$, altsaa og

$$\text{Buen } CLO = \frac{CO^2}{4CA} = \frac{CO^2}{2AB}$$

I denne Cycloïdale ere altsaa Buerne som Qvadraterne af Ordinaterne. I Fölge No. 4. er $AN = \frac{AM^2}{AB} = \frac{MN^2}{AB}$

altsaa $2\,CLO : AN = CO^2 : MN^2$

Forlænger man ON og CM til de skjære hinanden i S, saa bliver

$$CO : MN = CS : MS$$

fölgelig og $2CLO : AN = CS^2 : MS^2$.

eller $CLO : AN = CS^2 : 2MS^2$

en Proportion som indeholder Sammenligningen imellem to correspondérende Buer i Cycloïdalen CLZ og dens Genitrix ANV, ligesom

$$AB : AM = AM : AN$$

indeholder Sammenligning imellem de tilhinanden svarende Buer paa Basis ANV og Cirkelen ANBD.

§. 47.

Det maae være nok med de her givne Pröver paa den nöjagtigste Overeensstemmelse imellem det Bernoulliske af Forf. generaliserede Theorem og mange andre af Geometrerne fundne, bekjendtgjorte og beviiste Sandheder. Enkelte Undersögelser har jeg ikke udfört videre, men overladt det til dem blandt Analysens og den höjere Geometries Dyrkere, som maatte have Lyst til at trænge dybere i denne for Anvendelsen ligesaa vigtige, som for Forstanden interessante Deel af den theoretiske Mathematik. Mange Undersögelser kunde heller ikke udföres videre, af den i Anmærkningen til §. 44. anförte Aarsag. Vel har Hr. Kammerraad *Morville* i det *K. V. Selskabs Skrifters Nye Samlings 1ste Deel.* 1781. pag. 606. paa en ligesaa sindrig, som let Maade viist, hvorledes adskillige Species af transcendente Ligninger kunne oplöses. Men da deres Oplösning af Hr. *M.* reduceres til de höjere algebraïske Ligningers Resolution, saa lader denne Methode sig, hvor fortrinlig end dens Brugbarhed er i arithmetiske Opgavers Behandling, dog, saavidt Forf. er i Stand til at indsee det, ikke med lige Hæld anvende paa Geometrien, som vilde tabe sin Majestæt, naar den eftergav det allermindste af sine strænge Fordringer, og fordunkles paa sin Skjönhed, om den tillod sig, hvad den föjeligere Arithmetik saa ofte *maa* tillade, *Approximationer*. Imidlertid har Forf. foresat sig, ved Lejlighed at trænge dybere ind i nogle af de her afhandlede Materier, som synes ham skikkede til en fuldstændigere Udvikling, og levere Resultaterne af disse fortsatte Undersögelser, ifald de indeholde noget mærkværdigt, som Tillæg til nærværende Afhandling, om samme befindes værdig til at indrykkes i det K. V. Selskabs Skrifter, en Ære som Forf. vil stræbe at fortjene, ved stedse at levere mindre og mindre ufuldkomne Pröver paa den Iver, hvormed han dyrker den Videnskab, for hvilken han, ved förste Öjekast saa at sige, fattede en ligesaa varig Smag, i Henseende til dens mange for lidt kjendte Skjönheder, som Agtelse for den *Sandheds-Aand* der besjæler Videnskaben og dens ægte Dyrkere.

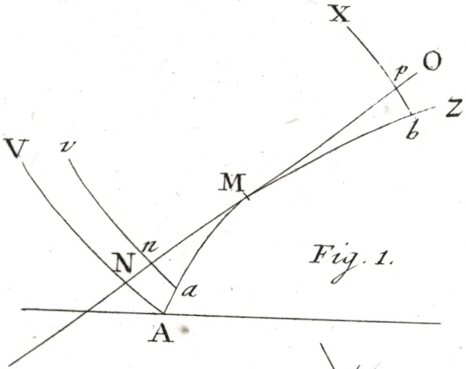

Fig. 1.

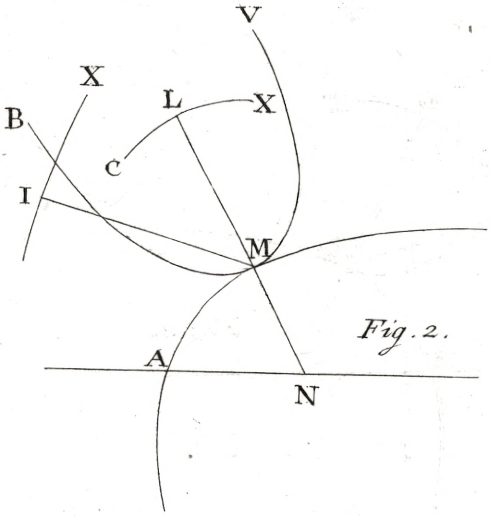

Fig. 2.

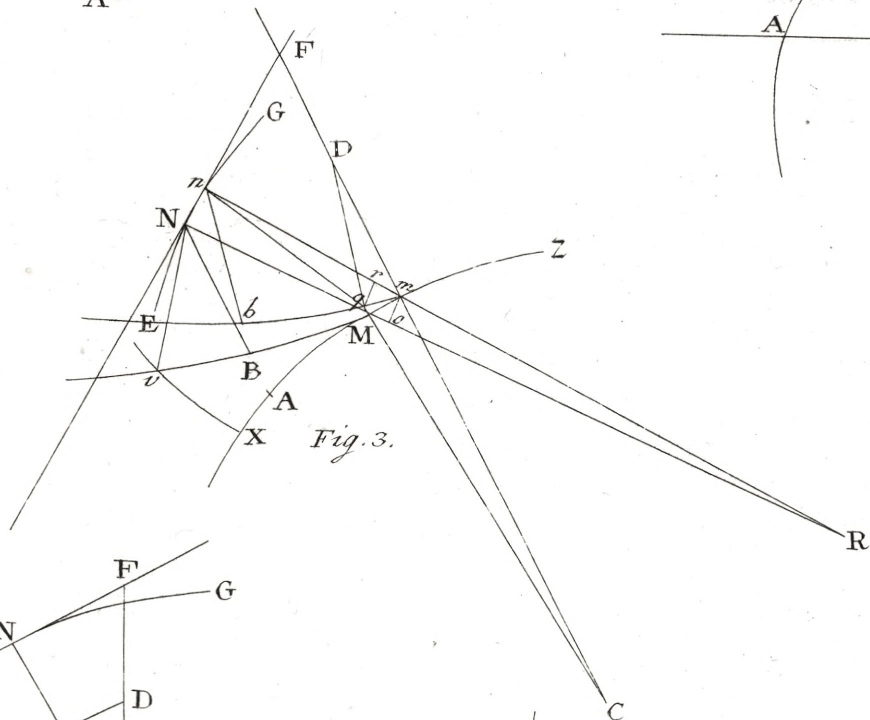

Fig. 3.

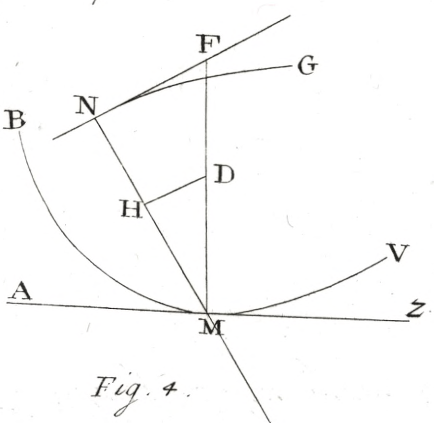

Fig. 4.

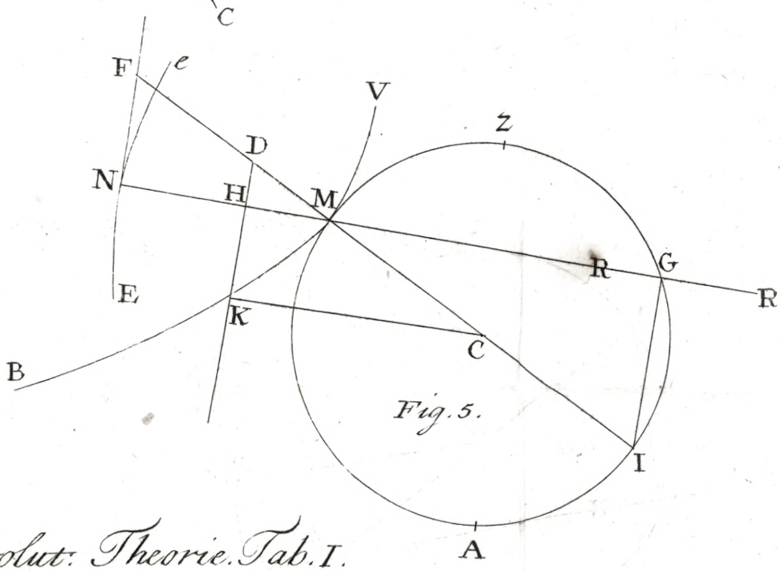

Fig. 5.

Bidrag til den geom: Evolut: Theorie. Tab. I.

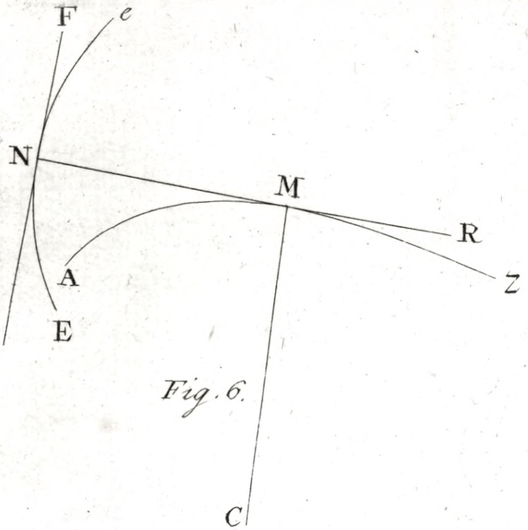

Fig. 6.

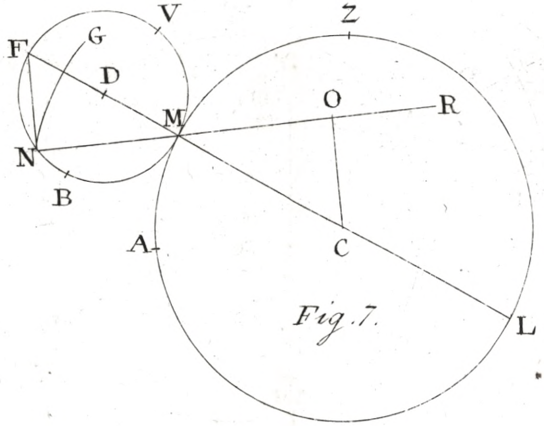

Fig. 7.

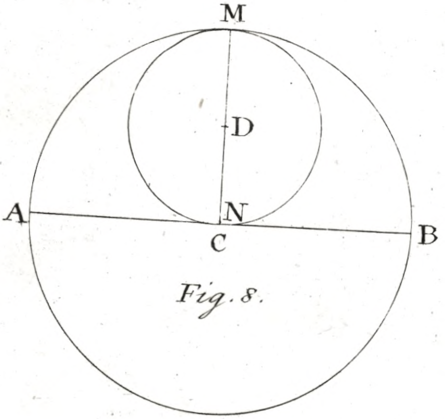

Fig. 8.

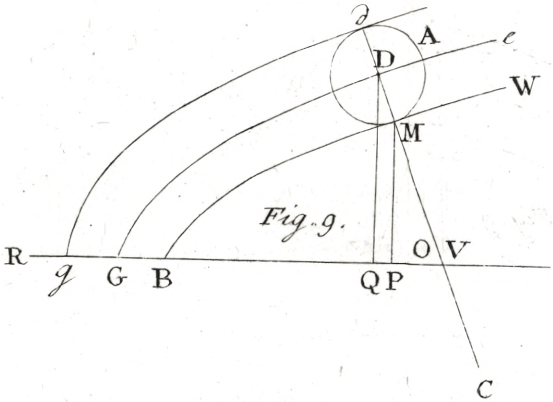

Fig. 9.

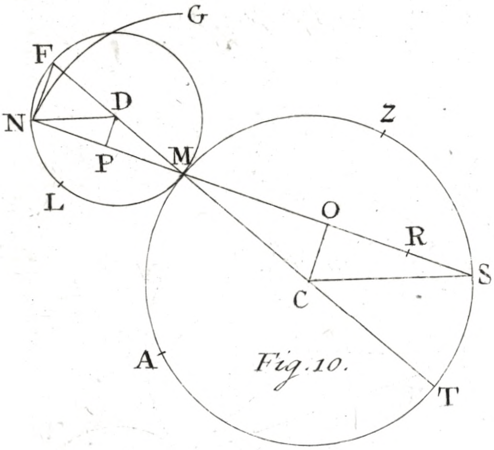

Fig. 10.

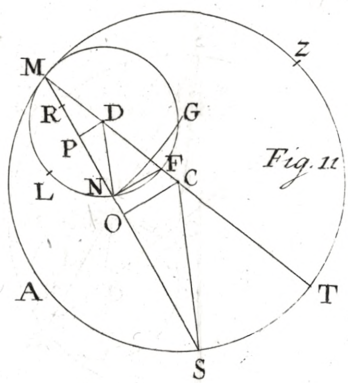

Fig. 11.

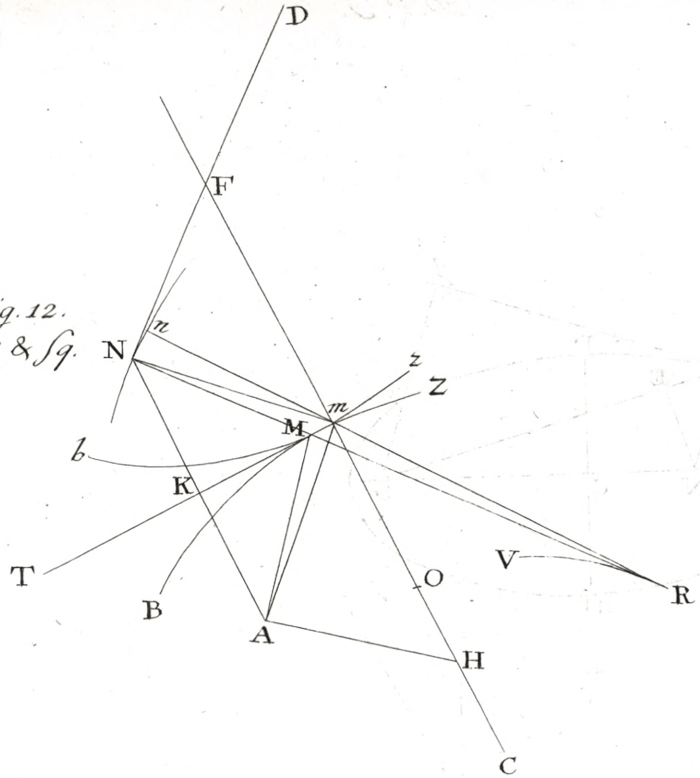

Fig. 12.
§. 18 & sq.

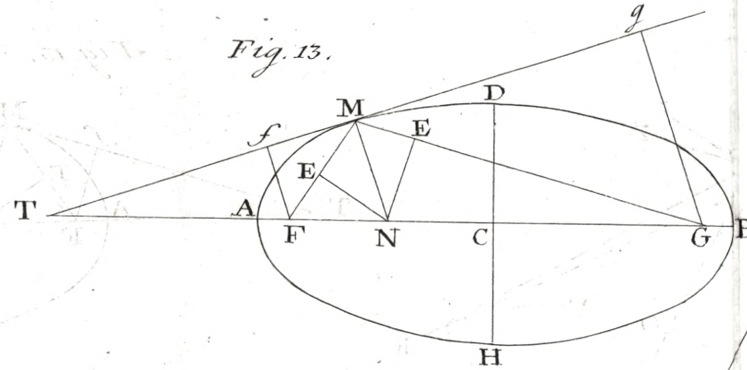

Fig. 13.

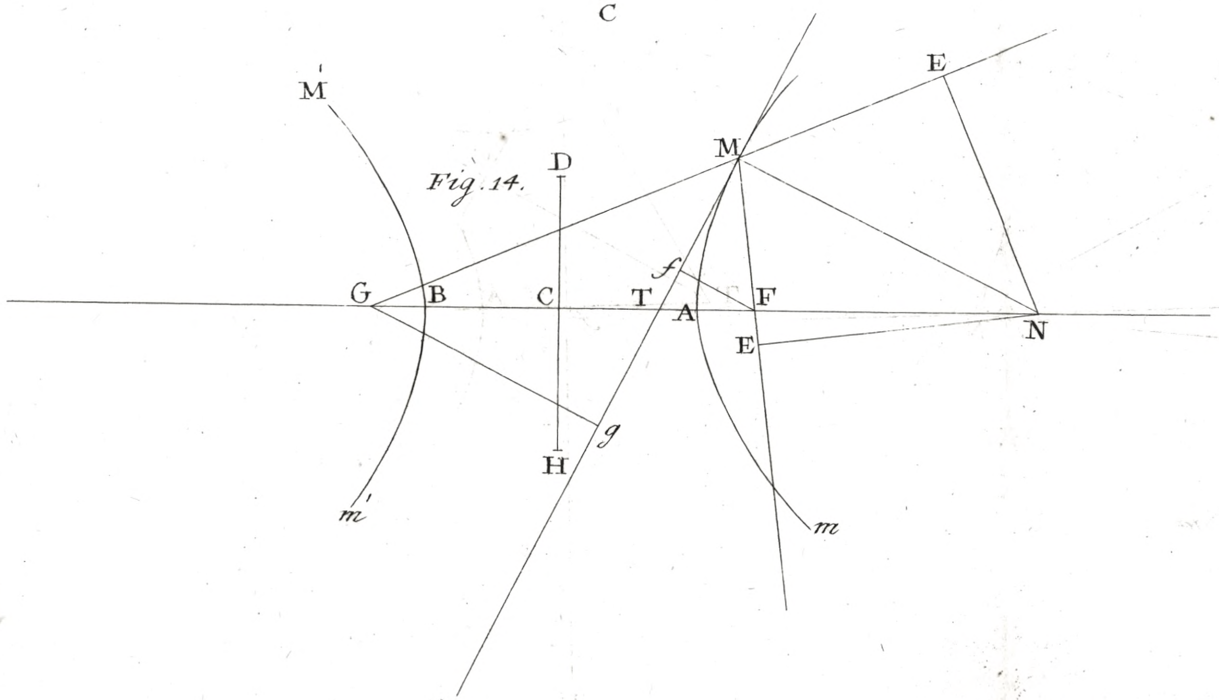

Fig. 14.

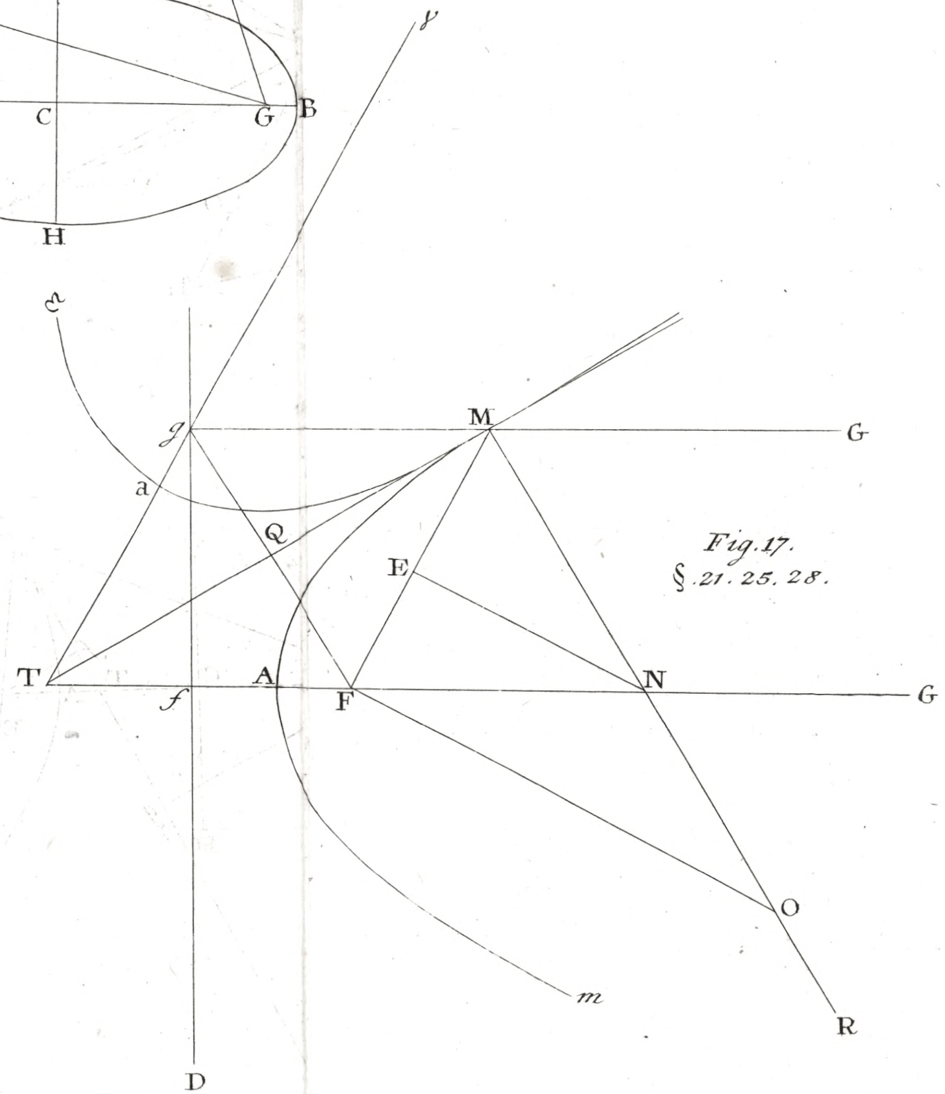

Fig. 17.
§. 21. 25. 28.

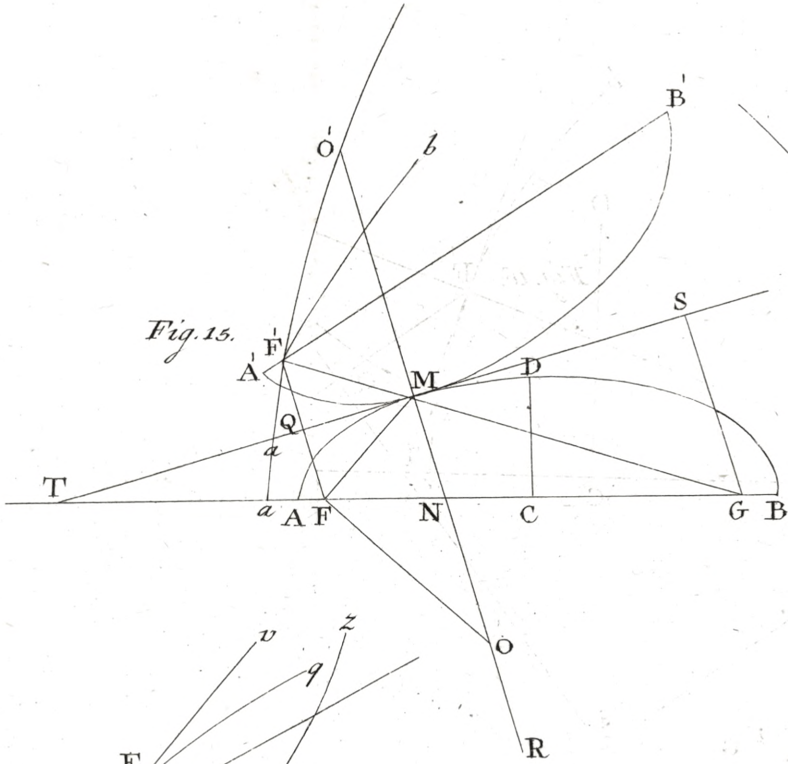

Fig. 15.

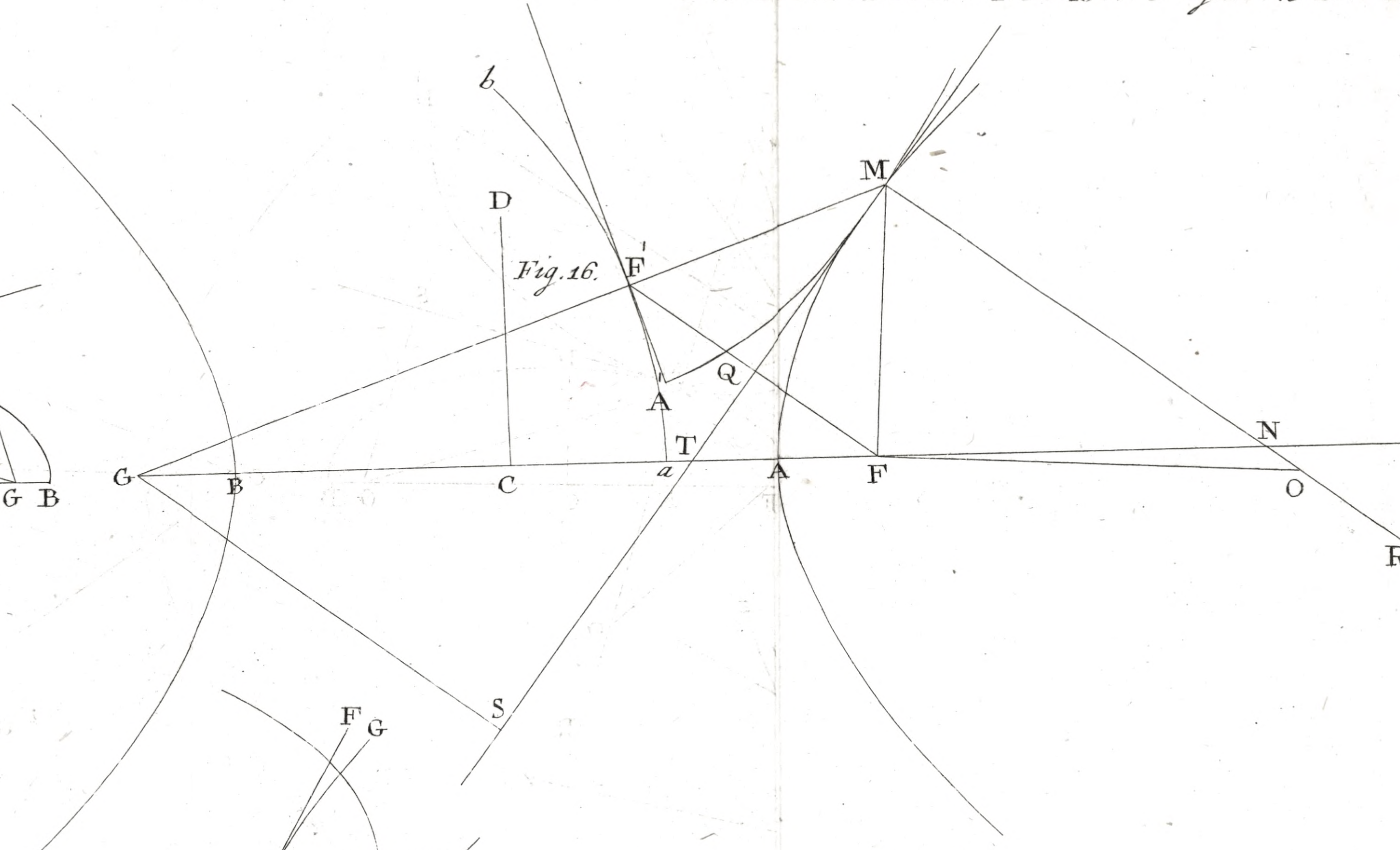

Fig. 16.

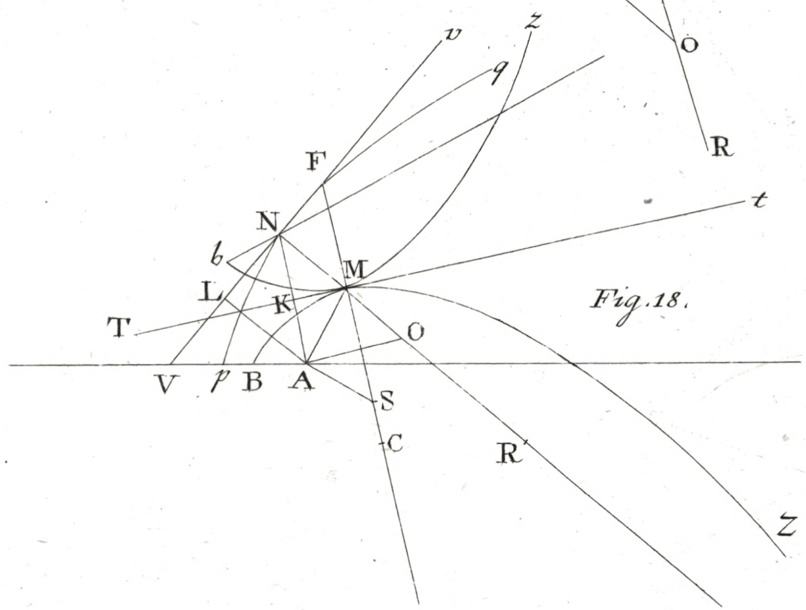

Fig. 18.

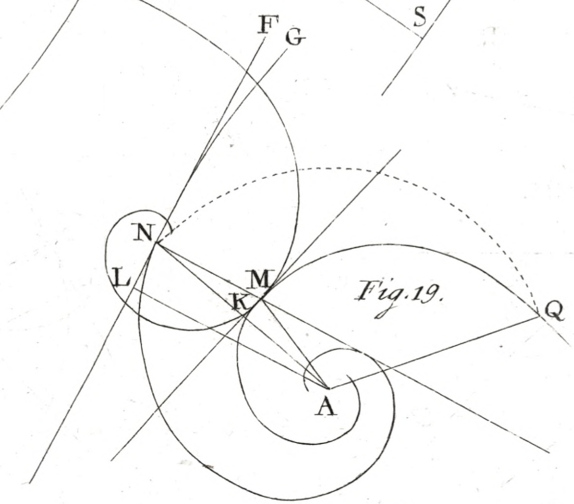

Fig. 19.

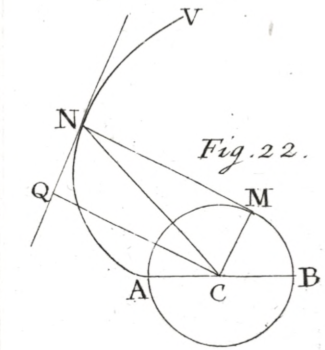

Fig. 22.

Bidrag til den geom: Evolut: Theorie Tab: IV.

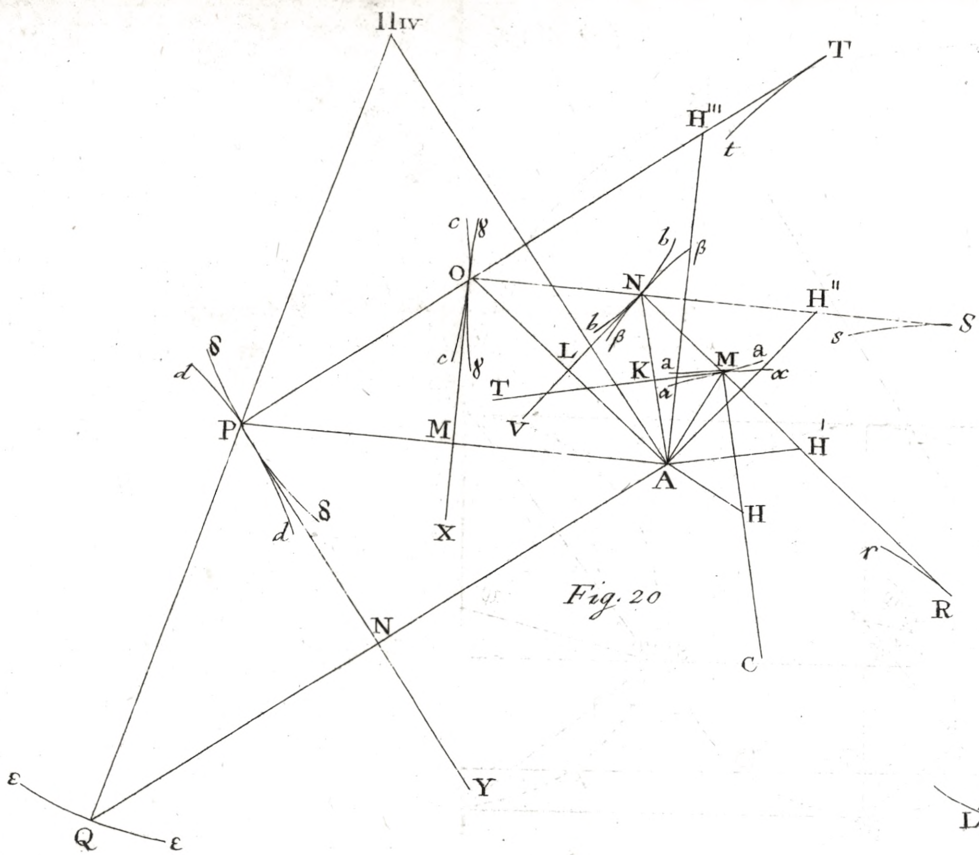

Fig. 20.

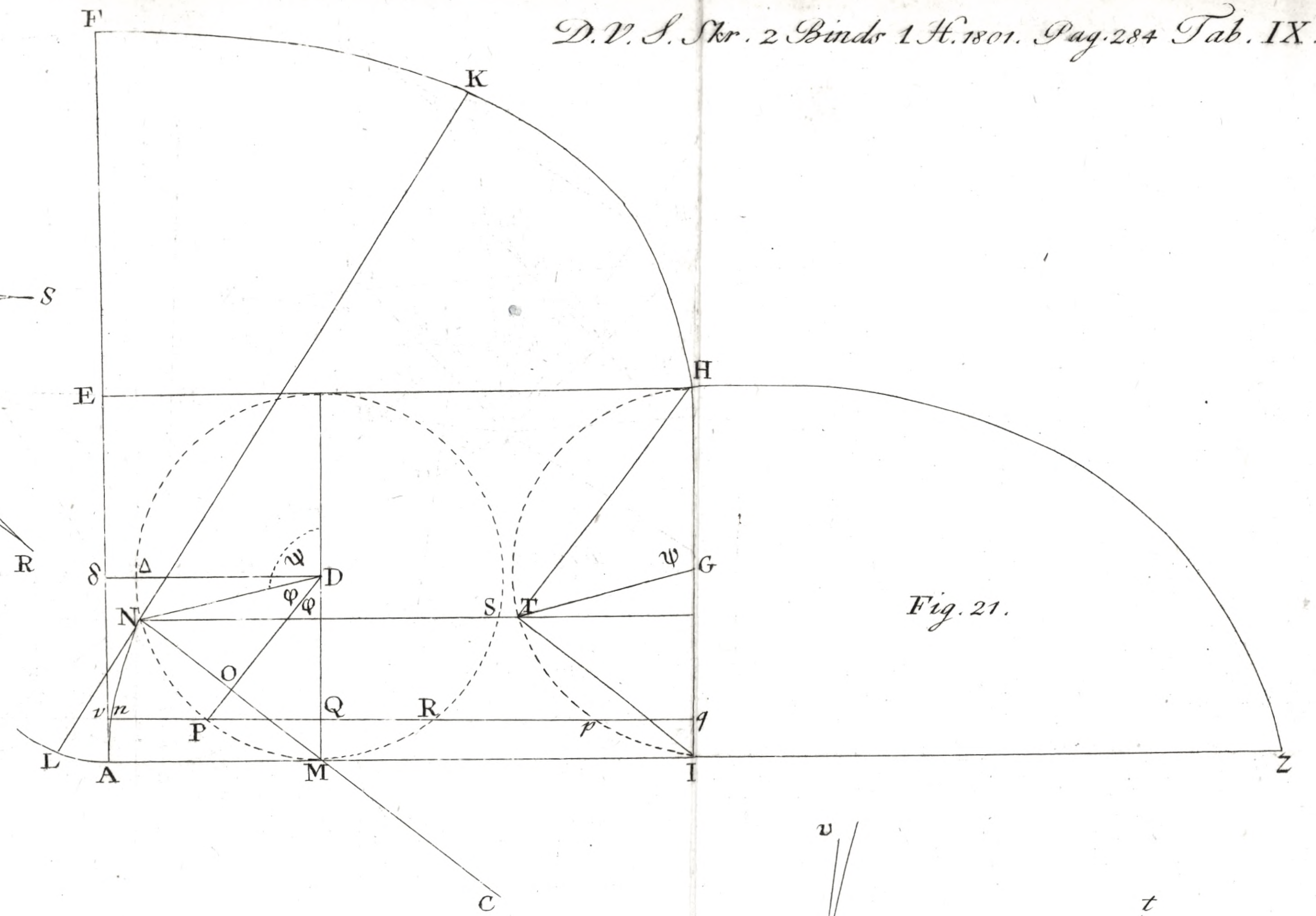

Fig. 21.

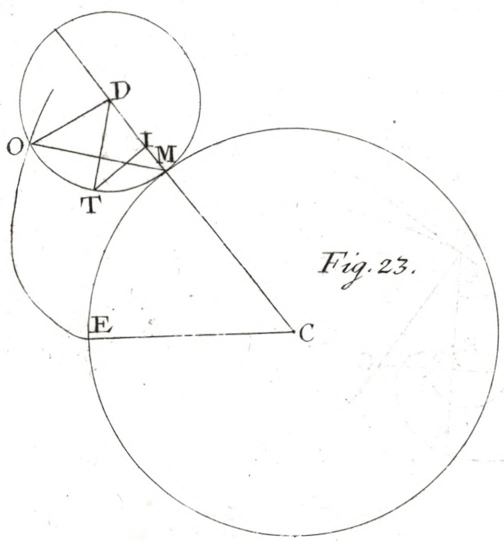

Fig. 23.

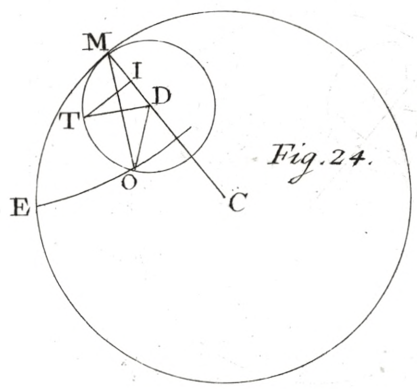

Fig. 24.

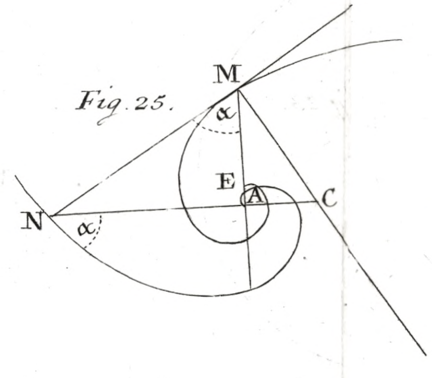

Fig. 25.

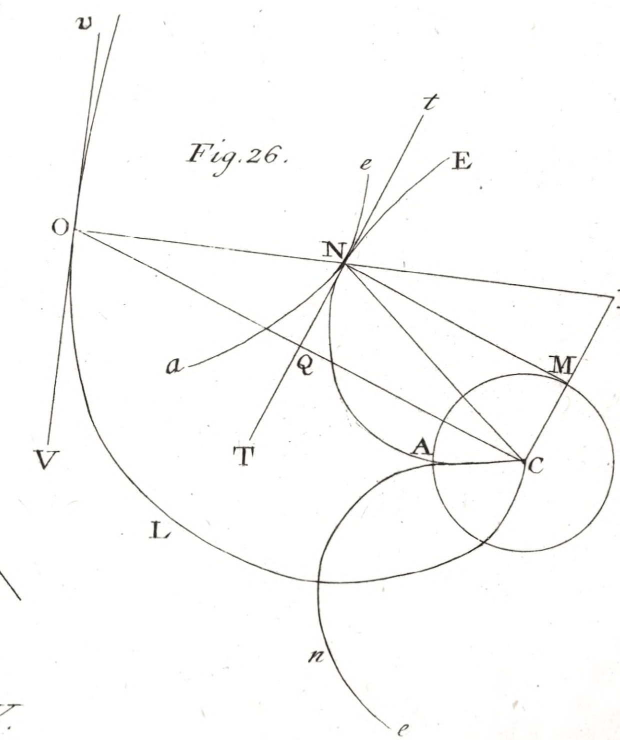

Fig. 26.

Rettelser og Tillaeg til Bidraget til den geom. Evolutions Theorie.

A. Rettelser.

Indledn. pag. 4. lin. 19. sættes *en* efter *iagttager.*

Afhandl. §. 16. lin. 12. *bestans* l. *bestan-*

§. 21. lin. 12. *Integrationen* l. *Differentiationen.*

ibid. lin. 14. *alttaa* l. *altsaa.*

§. 23. lin. 5. PM l. RM.

§. 26. l. 2. *endskjönt* l. *endskjöndt.*

ibid. lin. 3. sættes *den* efter *udstrække.*

§. 27. II. lin. 1. NR l. MR.

ibid. III. lin. 1. *16 og 17* l. *15 og. 16.*

— — lin. 3. FA l. FQ.

§. 30. lin. 16. bMZ l. bMz.

ibid. lin. 17. *generende* l. *genererende.*

ibid. lin. 24. sættes (§ 28) efter *Foregaaende.*

ibid. lin. 26. AN l. AM.

ibid. Anm. { lin. 1. *a* l. *2a.*
lin. 2. *Diameter* l. *Parameter;* AB l. $Ap = 2a$.
lin. 16. sættes AM efter *Straale.*

§. 31. lin 8. $=$ l. *eller.*

ibid. lin. 15. AM. l. AN.

§. 32. lin. 18. $\frac{2p_2y}{y}$ l. $\frac{2p^2}{y}$.

§. 33. lin. 2. *Poroblemer* l. *Problemer.*

§. 34. lin. 2. *kan man* l. *lad os.*

§. 39. Anm. lin. 9. *af* l. *og.*

§. 40. lin. ult. i Nævneren $p^{(n-1)}\,(n-1)$ l. $p^{(n-1)}\,1.(n)$

§. 44. Anm. lin. 6. *tllige* l. *tillige*.

§. 46. (I) lin. 1. DM l. CD.

§. 46. (7) lin. 73 sættes + imellem a Arc. sin. $\frac{z}{a}$ og $\sqrt{a^2 - z^2}$.

ibid. Anm. lin. 5. *Toppunkt*. l. *Begyndelsespunkt A*.

——————— sættes *nv* efter *Ordinate*.

§. 46. (8) lin. 9. udslettes 2 efter $\frac{1}{2}\phi$.

ibid. — lin. 10. *4* l. 2.

ibid. — lin. 11 og 12. *8*. l. *4*.

ibid. — lin. 16 *4*. l. 2.

ibid. — lin. 17 og 19 sættes $\frac{1}{2}d$ istædet for d, efter $\frac{1}{2}\phi$.

ibid. — lin. 24 og 25. CD. l. 2CD.

ibid. — lin. 24 sættes *Fig.* 23 efter *Epicycloiden.*.

§. 46. (9) lin. 6. læses y istædet for p i Proportionens 3die Led.

ibid. — lin. 7. 2pdp l. 2ydp.

ibid. Exempl. lin. 1. *Fvolvente* l. *Evolvente*. Fig. 22 l. 26.

B. Tillæg til §. 30. (See Fig. 18.)

Naar Ordinaten $y = AM$ svarer til Abscissevinklen $\phi = BAM$ og $AK = p$ er Perpendiklen paa Tangenten, findes V. $KAM = \psi$ deraf at $y d\phi : dy = \cot.\psi$, eller $\operatorname{tg.}\psi = \frac{dy}{y d\phi}$. Man antage i Almindelighed $y =$

$$a \sec.^n \frac{\phi}{n} = \frac{a}{\cos.^n \frac{\phi}{n}}, \text{ saa er } dy = \frac{a d\phi . \sin. \frac{\phi}{n}}{\cos.^{n+1} \frac{\phi}{n}}, \text{ altsaa } \operatorname{tg.}\psi =$$

$$\frac{a d\phi \sin. \frac{\phi}{n}}{\cos.^{n+1} \frac{\phi}{n}} : \frac{a d\phi}{\cos.^n \frac{\phi}{n}} = \operatorname{tg.} \frac{\phi}{n}, \text{ fölgelig } \psi = \frac{\phi}{n}. \text{ Deraf er-}$$

holdes $BAK = BAN = \phi - \frac{\phi}{n} = \frac{n-1}{n}\phi$. Fremdeles er $AK = p$

$= y \cos. KAM = y \cos. \frac{\phi}{n} = \frac{a}{\cos.^{n-1} \frac{\phi}{n}} = a \sec.^{n-1} \frac{BAN}{n-1}$, fordi

$\frac{\phi}{n} = \frac{BAN}{n-1}$. Men $AN = 2p = 2a \sec.^{n-1} \frac{BAN}{n-1}$, hvoraf fölgende Læresætning udledes:

Naar Genitricen (BMZ) bestemmes ved Ligningen $AM = a \sec.^{n} \frac{BAM}{n}$, er: $AN = 2a \sec.^{n-1} \frac{BAN}{n-1}$ den Ligning, som udtrykker Cycloïdalen (pNq's) Natur; og omvendt: Naar Cycloïdalen gives ved Ligningen: $y = a \sec.^{n} \frac{\phi}{n}$ er den ved Evolution fremkommen af en Curve, hvis Ligning er: $y = \frac{a}{2}$ $\sec.^{n+1} \frac{\phi}{n+1}$.

Saaledes er Genitricen til den rette, ved $y = a \sec. \phi$ betegnede, Linie den ved $y = \frac{a}{2} \sec.^{2} \frac{\phi}{2}$ bestemte Parabole, hvis Genitrix atter er den i §. 30 omtalte Curve, $y = \frac{a}{4} . \sec.^{3} \frac{\phi}{3}$.

Tillæg til §. 46. (See Fig. 26.)

Det til denne §phs. 9de Corollarium henhörende Exempel ville den gunstige Læser, da dets Oplösning grunder sig paa den urigtige Formel: $d. BN = \frac{pdp}{\sqrt{y^2 - p^2}}$, behage at forbedre paa fölgende Maade:

$d. CO$ (lin. 8. i Ex.) $= \frac{2ydp}{a} = \frac{2dp}{a} . \sqrt{a^2 + p^2}$; altsaa CO eller $CLO = Const. + \frac{p\sqrt{a^2 + p^2}}{a} + a \log. (p + \sqrt{a^2 + p^2}) = \frac{p\sqrt{a^2 + p_2}}{a}$ $+ a \log. \frac{p + \sqrt{a^2 + p^2}}{a} = \frac{y\sqrt{y^2 - a^2}}{a} + a. \log. \frac{y + \sqrt{a^2 - a^2}}{a}$, fordi CLO er $= 0$ i Evolutionens Begyndelse, naar $p = 0$ eller $y = a$. Af p eller y kan altsaa Længden af den afviklede Bue bestemmes.

Til at finde Cykloïdalens Natur tjener den samme Ligning: d. CLO $= \frac{2ydp}{a} = \frac{2dp}{a}\sqrt{a^2+p^2} = 2dp\sqrt{1+\frac{p^2}{a^2}}$; thi man antage $CO = 2p = z$ og den til CO svarende Abscissevinkel $BCO = \psi$, saa er d. $CLO = \sqrt{dz^2 + z^2 d\psi^2} = dz\sqrt{1+\frac{z^2}{4a^2}}$, naar $z = 2p$ substitueres. Altsaa er $d\Psi = \frac{dz}{2a}$, eller $\psi = \frac{z}{2a}$, fordi $\psi = 0$ naar $z = 0$. Af $\psi = \frac{z}{2a}$ fölger $z = 2a\Psi$.

Det er: Cycloïdalen til Cirkelens Evolvente er en Archimedisk Spirale, som construeres, ved at tage Ordinaten fra Polen C eller CO, saa stor som den Bue, paa den med den dobbelte Radio 2CA beskrevne Cirkelpheripherie, der svarer til Abscissevinkelen. (Cf. Karstens Math. theor. elem. atqve: sublim. Geom. subst. Sect. VIII. §. 84.)

Anm. Man begriber let, at BC, en nedad dragen Tangente til Spiralen i C maa være lodret paa CA eller den rette Linie, som forener Cirkelens Middelpunkt, C, med Genitricens Begyndelsespunkt, A. Dette indsees ligeledes af Fölgende:

$$d.\ AN : d.\ CN = CN : NQ$$

eller $ds : dy = y : a$

altsaa $ds = \frac{ydy}{a}$ og $ds^2 = \frac{y^2 dy^2}{a^2} = y^2 d\phi^2 + dy^2$, altsaa $d\phi = \frac{dy}{ay}\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{ydy}{ay^2}\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{pdp}{a(a^2+p^2)}$. $p = \frac{dp}{a} - \frac{adp}{a^2+p^2}$, altsaa og $\phi = \frac{p}{a} - A.\ tg.\ \frac{p}{a}$, fordi $\phi = 0$, naar $p = 0$. Men V. OCN $= A.\ tang.\ \frac{a}{p}$, altsaa V. ACO $=$ ACN $-$ OCN $= \frac{p}{a} - A.\ tg.\ \frac{p}{a} - A.\ tg.\ \frac{a}{p} = \frac{p}{a} - \frac{\pi}{2} = \frac{z}{2a} - \frac{\pi}{2} = \frac{z}{2a} - 90°$. Fremdeles er $\psi = \frac{z}{2a}$; altsaa ACO $= \psi - 90°$, eller $\psi -$ ACO $= 90° =$ BCO $-$ ACO $=$ BCA.